JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS **67**, 380–412 (1986)

Inversion de la matrice de Toeplitz en d dimensions et développement asymptotique de la trace de l'inverse à l'ordre d

A. SEGHIER

Université Paris-Sud, Bâtiment 425 – Statistique Appliquée, 91405 Orsay Cedex, France

Communicated by Irving Segal

Received September 8, 1984; revised March 4, 1985

Let f be an integrable function of the d-dimensional torus and let C_m be the Fourier coefficients of f $(m=(m_1,..., m_d)\in \mathbb{Z}^d)$. We denote by $\Lambda=\prod_{j=1}^{d}\{0N_j\}$; $(N_1,..., N_d)\in \mathbb{Z}^d$. A Toeplitz matrix associated to f and Λ is defined by

$$T_\Lambda(f)=(C_{m-m'}),$$

$(m, m')=((m_1,..., m_d),\ (m'_1,..., m'_d))\in \Lambda\times\Lambda$. The asymptotic development (with order d) of the trace of $(T_\Lambda(f))^{-1}$, as $|\Lambda|=\mathrm{Card}\,\Lambda$ tends to infinity is given when $f=|P|^{-2}$ and P is trigonometrical polynomial. We denote by Tr, the trace of the matrix and we have the main result of this paper: $\mathrm{Tr}(T_\Lambda(f))^{-1} = |\Lambda|\,a_0(f)+|\Lambda|^{(d-1)/d}\ a_1(f)+\cdots+|\Lambda|^{(d-k)/d}\ a_k(f)+\cdots+a_d(f)+o(1)$. © 1986 Academic Press, Inc.

Soit $\mathbb{T}^d$ le tore à d dimensions, f une fonction positive de $L^1(\mathbb{T}^d)$, $m=(m_1,..., m_d)\in \mathbb{Z}^d$ et $C_m(f)=C_m$ les coefficients de Fourier aux points m.

Soit Λ une partie finie de $\mathbb{Z}^d$, on définit la forme de Toeplitz associée à f par:

$$F_\Lambda(f)=\int_{\mathbb{T}^d}\left|\sum_{m\in\Lambda} C_m\, e^{i\langle\theta, m\rangle}\right|^2 d\sigma$$

où $d\sigma$ est la mesure de Haar sur $\mathbb{T}^d$.

On note par $T_\Lambda(f)=(C_{m-m'})$, $(m, m')\in\Lambda\times\Lambda$ sa matrice: on l'appelle matrice de Toeplitz associée à f.

1

Soit $N=(N_1,..., N_j)$ un élément de $\mathbb{Z}^d_+$. On étudie, lorsque $\Lambda=\prod_{j=1}^{d}\{0,..., N_d\}$, le comportement de la trace de $(T_\Lambda(f))^{-1}$ (à condition que l'inverse existe) quand $\inf N_j$ tend vers l'infini. Dans le cas du

0022-1236/86 $3.00

tore $\mathbb{T}$, Szegö [2] établit le théorème suivant (avec quelques conditions restrictives sur f):

$$\lim_{N \to \infty} (\log(\det T_N(f) - T_r T_N(\log f)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n| \, |C_n(\log f)|^2$$

(où det = déterminant).

Nous proposons dans ce travail deux résultats:

A

Lorsque $f = |g|^2$, avec $g^{\pm 1} \in H^\infty$, $\sum_{m \in \mathbb{Z}_+^d} |(1/g)\hat{\ }(m)| < \infty$ et $\sum_{m \in \mathbb{Z}_+^d} (\sum_{k=1}^d m_k) |(1/g)\hat{\ }(m)|^2 < \infty$, nous obtenons un développement asymptotique avec deux termes, le multi-rectangle tend "vers l'infini" dans toutes les directions de $\mathbb{Z}_+^d$ de manière différente. On note $T_N(1/f)$ la matrice de Toeplitz associée à $1/f$, et $m = (m_1, ..., m_d)$, on a:

$$\lim_{\substack{\inf N_j \to \infty \\ 1 \leqslant j \leqslant d}} \left(1 \Big/ \prod_{i=1}^{d} (N_i + 1)^{1 - 1/d)} \operatorname{Tr}((T_N(f))^{-1} - T_N\left(\frac{1}{f}\right)) \right)$$

$$= -2 \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^d} \sum_{k=1}^{d} \frac{m_k}{\alpha_k} \left| \left(\frac{1}{g}\right)^{\wedge} (m) \right|^2$$

(α_k sont des nombres positifs caractérisant le mode de croissance des "rectangles" Λ, quand $\inf N_j$ tend vers l'infini).

B

Le deuxième résultat, qui est aussi le principal, est un développement asymptotique de la trace à l'ordre d, qui correspond à la dimension de l'espace. Dans ce travail, nous supposons $f = 1/|P|^2$ où P est un polynôme trigonométrique, une extension à $f = |g|^2$ où $g \in H^\infty$ est en préparation.

$$\operatorname{Tr}(T_N(f))^{-1} = a_0 \prod_{i=1}^{d} (N_i + 1) + a_1 \left(\prod_{i=1}^{d} (N_i + 1) \right)^{d - 1/d}$$
$$+ \cdots + a_{d-1} \left(\prod_{i=1}^{d} (N_i + 1)^{1/d} \right) + a_d + o(1).$$

2

Le comportement asymptotique de $\operatorname{Tr}(T_\Lambda(f))^{-1}$ permet d'obtenir un théorème limite de Szegö, sur les déterminants ainsi que cela a été fait dans un article de Widom [7] dans le cadre du tore $\mathbb{T}^d$ et de $\mathbb{R}^n$. Cette idée est reprise ici, et l'effort portera sur le développement asymptotique de la trace à tout ordre. En effet, nous avons donné, dans une précédente note [4], un développement asymptotique de la trace de l'inverse, avec deux termes, et nous avons précisé le calcul qui rendait ce développement équivalent au théorème limite sur les déterminants (et plus généralement pour Tr $F(T_N(f))$ où F est une fonction analytique telle que $F(T_N(f))$ ait un sens).

Ce point de vue permet de s'attendre, dans le cadre de ce travail, à un développement asymptotique du déterminant (respectivement de Tr $F(T_N(f)))$ à l'ordre d, comme conséquence du résultat énoncé en B.

3

Le théorème limite de Szegö sur les déterminants généralisé à $\mathbb{T}^d$ et à $\mathbb{R}^d$ (développement avec deux termes) a été établi par Linnick en 1975 [3].

La même année, la généralisation à $\mathbb{R}^d$ de ce théorème est proposée par Widom [5], avec des conditions plus générales sur f (transformée de Fourier du symbole) qui permet de définir l'opérateur de Toeplitz.

4

Le champ d'applications de tels résultats est important, il suffit de se référer à l'abondante littérature concernant le théorème limite de G. Szegö. Signalons toutefois deux applications récentes:

(i) une application aux statistiques pour étudier la qualité de l'approximation (due à Whittle) de la vraisemblance d'un champ aléatoire gaussien.

(ii) une interprétation de l'entropie en cristallographie à l'aide du théorème limite de Szegö (Entropie de Burg).

5

Les résultats les plus importants et les plus décisifs concernant le comportement asymptotique du déterminant sont obtenus par H. Widom (1975–1981) où le lien a été fait avec d'autres domaines et d'autres opérateurs (opérateurs pseudo-différentiels) sont mis en évidence [5–7].

Ainsi, dans le cadre le plus général (variétés riemanniennes), Widom propose un développement asymptotique à un ordre quelconque et où les trois premiers termes sont explicités.

Il serait intéressant d'établir un pont entre les deux points de vue.

Les méthodes utilisées ici, dans le cadre discret, se basent sur des idées géométriques: intersection de sous-espaces de Hilbert, angle de sous-espaces, etc.

Je tiens à remercier particulièrement le Professeur D. Dacunha-Castelle pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et pour les encouragements prodigués au cours de la rédaction de cet article.

Notations et définitions

a

Soient $f>0$, $f\in L^1(\mathbb{T}^d)$, d un entier supérieur ou égal à 2, Λ une partie finie de $\mathbb{Z}^d_+=\{m=(m_1,\dots,m_j),\ m_j\geqslant 0,\ j=1,\dots,d\}$.

On désignera par E_Λ le sous-espace vectoriel des polynômes trigonométriques à spectre dans Λ.

On pose pour $m=(m_1,\dots,m_d)\in\mathbb{Z}^d$ et $(\theta_1,\dots,\theta_d)\in\mathbb{T}^d$. χ^m est définie par:

$$\chi^m(e^{i\theta_1},e^{i\theta_2},\dots,e^{i\theta_d})=e^{i\sum_{j=1}^d\langle m_j,\theta_j\rangle},$$

$\forall h\in L^1(\mathbb{T}^d)$, $h\sim\sum_{m\in\mathbb{Z}^d}\alpha_m\chi^m$ (série de Fourier de h), on pose

$$\pi_\Lambda h=\sum_{m\in\Lambda}\alpha_m\chi^m,$$

ce qui définit π_Λ comme projecteur de $L^1(\mathbb{T}^d)$ sur E_Λ.

On définit la matrice de Toeplitz associée à f et à la partie Λ, qu'on notera $T_\Lambda(f)$, comme la matrice de l'opérateur:

$$\forall p\in E_\Lambda,\qquad T_\Lambda(f)\,p=\pi_\Lambda fp.$$

b

On note dans $L^2(\mathbb{T}^d)$:

$$H^{2+}=\{h\in L^2(\mathbb{T}^d),\ h\sim\sum\alpha_m\chi^m,\ m\in\mathbb{Z}^d_+\}$$

et P le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbb{T}^d)$ sur H^{2+}

$H^{2-}=\overline{\chi H^{2+}}$ et Q le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbb{T}^d)$ sur cet espace. Enfin:

$$\tilde{H}^{2-}=L^2(\mathbb{T}^d)\ominus H^{2+}\qquad\text{et}\qquad P_-=I-P,$$

$$\tilde{H}^{2+}=L^2(\mathbb{T}^d)\ominus H^{2-}\qquad\text{et}\qquad P_+=I-Q.$$

Inversion de la matrice de Toeplitz

a

L'idée générale pour inverser $T_\Lambda(f)$ peut être la suivante: on construit dans $L^2_{1/f}(\mathbb{T}^d)$ un sous-espace K de dimension finie tel que $E_\Lambda=\{\theta/f\colon\theta\in K\}$. On considère la décomposition suivante:

$$L^2_{1/f}(\mathbb{T}^d)=K\oplus K^\perp. \tag{1}$$

On observera que $L^2_{1/f}(\mathbb{T}^d) \subset L^1(\mathbb{T}^d)$ du fait que $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$ et de l'inégalité de Schwarz.

Le sous-espace $K^\perp$ est alors composé de fonctions $\psi \in L^2_{1/f}(\Pi^d)$ vérifiant

$$\hat{\psi}(k) = 0, \qquad \forall k \in \Lambda. \tag{2}$$

En effet soit $\psi \in K^\perp$ et $\theta \in K$, on a:

$$\int \theta \cdot \frac{\bar{\psi}}{f}\, d\sigma = 0 \qquad (\sigma \text{ mesure de Haar sur } \mathbb{T}^d).$$

Comme par construction tout polynôme $\in E_\Lambda$ s'écrit θ/f, la relation (2) s'ensuit.

Soit P_K le projecteur orthogonal de $L^2_{1/f}(\mathbb{T}^d)$ sur K et $q \in E_\Lambda$. On écrit $P_K q = fp$ où p est un polynôme de E_Λ. On décompose q suivant la somme orthogonale (1):

$$q = fp + q - fp.$$

On a d'après (2),

$$q = P_\Lambda q = P_\Lambda fp = T_\Lambda(f)\, p = P_\Lambda P_K q.$$

Ceci montre que $T_\Lambda(f)$ est un opérateur surjectif sur E_Λ. Comme nous sommes en dimension finie, il est inversible et:

$$p = (T_\Lambda(f))^{-1} q = (1/f)\, P_K q.$$

b

On notera dans la suite H^∞ l'espace de fonctions definies sur $\mathbb{T}^d$ qui sont limites au bord de fonctions analytiques et bornées dans le polydisque-unité. On suppose $f = |g|^2$ avec $g^{\pm 1} \in H^\infty$. Soit $N = (N_1, ..., N_d) \in \mathbb{Z}^d_+$, on prend $1 = (1, 1, ..., 1)$, $\Lambda = \prod_{j=1}^d \{0, ..., N_j\}$ et on note $E_N = E_\Lambda$.

Lemme 1. *Posons $K = \bar{g} H^2 \cap g \chi^{N+1} H^{2-}$. Le sous-espace K vérifie alors les propriétés décrites en a.*

Preuve. Comme $g^{\pm 1} \in H^\infty$ $g^{-1} H^{2+} = H^{2+}$ et $\bar{g}^{-1} H^{2-} = H^{2-}$. Soit $\phi \in K$, alors $\phi/f = \phi/|g|^2$ et $\phi/|g|^2 \in (1/g)\, H^{2+} \cap (1/\bar{g})\, \chi^{N+1} H^{2-} = E_N$.

Remarque. On peut écrire $K = \bar{g}(H^{2+} \cap (g/\bar{g})\, \chi^{N+1} H^{2-}) = \bar{g} K_0$. On note par P_{K_0} le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbb{T}^d)$ sur K_0, on a:

$$\forall q \in E_N, \qquad P_K(q) = \bar{g} P_{K_0}\left(\frac{q}{\bar{g}}\right)$$

et

$$(T_N(f))^{-1}(q) = \frac{1}{g} P_{K_0}\left(\frac{q}{\bar{g}}\right).$$

c

Il ne reste plus qu'à expliciter P_{K_0}.

Posons $\phi_N = \chi^{N+1}\, g/\bar{g}$. L'orthogonal de K_0 dans $L^2(\mathbb{T}^d)$ s'écrit:

$$K_0^- = \overline{\tilde{H}^{2-} + \phi_N H^{2+}}.$$

Si on pose $L_N = \tilde{H}^{2+} \cap (\tilde{H}^{2+}\, \theta \bar{\phi}_N \tilde{H}^{2-})$, ou aussi: $K_0 = \overline{\tilde{H}^{2-} \oplus \phi_N L_N}$. On remarquera que $L_N = \overline{P_+(\bar{\phi}_N H^{2+})}$. Ainsi pour tout $\psi \in L^2(\mathbb{T}^d)$ on a:

(i) $P_{K_0}(\psi) = \psi - \lim_{n\to\infty}(\theta_{1,n} + \phi_N P_+(\bar{\phi}_N\, \theta_{2,n}))$.

Avec $\forall n > 0$, $\theta_{1,n} \in \tilde{H}^{2-}$ et $\theta_{2,n} \in H^{2+}$ (n entier).

LEMME 2. *Soit ψ un élément de $L^2(\mathbb{T}^d)$. Pour qu'un élément de K_0 noté P_{K_0} soit la projection orthogonale de ψ sur ce sous-espace, il faut et il suffit qu'il existe deux suites:*

$(\theta_{1,n})_{n\in\mathbb{N}} \subset \tilde{H}^{2-}$ *et* $(\theta_{2,n})_{n\in\mathbb{N}} \subset H^{2+}$ *telles que:*

(i) $\lim_{n\to\infty}(\theta_{1,n} + \phi_N P_+ \phi_N \theta_{2,n})$ *existe dans* $L^2(\mathbb{T}^d)$.

(ii) $\lim_{n\to\infty}(P_+(\bar{\phi}_N \theta_{1,n}) + P_+(\bar{\phi}_N \theta_{2,n})) = P_+(\bar{\phi}_N \psi)$.

(iii) $\lim_{n\to\infty}(\theta_{1,n} + P_- \phi_N P_+ \bar{\phi}_N \theta_{2,n})$

et la projection est donnée par:

$$P_{K_0}(\psi) = \psi - \lim_{n\to\infty}(\theta_{1,n} + P_+ \bar{\phi}_N \theta_{2,n}).$$

Preuve. (a) Les conditions sont nécessaires: si $P_{K_0}(\psi)$ est la projection de ψ sur K_0, la relation (1) dans c. implique (i) et on obtient (ii) et (iii) en écrivant que

$$P_{K_0}(\psi) \in H^{2+} \qquad \text{et} \qquad P_{K_0}(\psi) \in \phi_N H^{2-}.$$

(b) Les conditions sont suffisantes: La condition (i) montre que si on pose $P_{K_0}(\psi) = \psi - \lim_{n\to\infty}(\theta_{1,n} + \phi_N P_+ \bar{\phi}_N \theta_{2,n})$ alors $\psi - P_{K_0}(\psi) \in K_0$ et les conditions (ii) et (iii) montrent que $P_{K_0}(\psi) \in K_0$.

Les équations (ii) et (iii) du lemme impliquent

$$\lim_{n\to\infty}(I - P_+ \phi_N P_- \bar{\phi}_N)\, P_+(\bar{\phi}_N \theta_{2,n}) = P_+ \overline{\phi_N}\, P(\psi).$$

Remarquons que $L_N = \overline{(I - P_+ \bar{\phi}_N P_- \phi_N)\ H^{2+}}$, et on a $P_+ \overline{\phi_N} P_- \phi_N L_N \subset L_N$. Notons par H_{ϕ_N} la restriction de $\psi \to P_- \phi_N \psi$ à L_N. La restriction de l'opérateur $\theta \to P_+ \bar{\phi}_N P_- \phi_N \theta$ à L_N est égale à $H^*_{\phi_N} H_{\phi_N}$.

PROPOSITION 1. *On suppose que $f = |g|^2$ avec $g^{\pm 1} \in H^\infty$. Alors*

(i) *Il existe une constante positive α telle que*

$$\forall N \in \mathbb{Z}^d_+, \qquad \|H_{\phi_N}\| \leqslant \alpha < 1.$$

(ii) *L'opérateur $T_N(f)$ est inversible et d'inverse*: $\forall q \in E_N$

$$(T_N(f))^{-1}(q) = \frac{q}{|g|^2} - \frac{1}{g} P_- \left(\frac{q}{\bar{g}}\right) - \frac{1}{g} P\phi_N (I - H^*_{\phi_N} H_{\phi_N})^{-1} P_+ \bar{\phi}_N P \left(\frac{q}{\bar{g}}\right).$$

Preuve. (a) Montrons que pour tout $N \in \mathbb{Z}^d_+$, $\|H_{\phi_N}\| < 1$. D'après la définition de l'opérateur H_{ϕ_N} ceci équivaut à montrer que $\tilde{H}^{2-} + \phi_N L_N$ est fermé pour tout $N \in \mathbb{Z}^d_+$. D'après ce qui précède ce sous-espace est le même que

$$\tilde{H}^{2-} + \phi_N \tilde{H}^{2+} = \tilde{H}^{2-} + \frac{g}{\bar{g}} \chi^{(N+1)} \tilde{H}^{2+}$$

La fonction $g^{\pm 1} \in H^\infty$ par hypothèse. Ceci implique que $\bar{g}\tilde{H}^{2-} = \tilde{H}^{2-}$ et $g\chi^{(N+1)} \tilde{H}^{2+} = \chi^{(N+1)} \tilde{H}^{2+}$.

Le sous-espace précédent s'écrit:

$$\bar{g}\tilde{H}^{2-} + g\chi^{(N+1)} \tilde{H}^{2+} = \tilde{H}^{2-} + \chi^{(N+1)} \tilde{H}^{2+}.$$

Nous avons alors:

$$\tilde{H}^{2-} + \chi^{(N+1)} \tilde{H}^{2+} = \tilde{H}^{2-} \ominus (\chi^{(N+1)} H^{2+} \ominus (\tilde{H}^{2-} \cap \chi^{(N+1)} \tilde{H}^{2+})).$$

Il suffit en effet de remarquer que:

$$\chi^{(N+1)} \tilde{H}^{2+} \ominus (\tilde{H}^{2-} \cap \chi^{(N+1)} \tilde{H}^{2+}) = H^{2+} \ominus E_N \subset (\tilde{H}^{2-})^\perp$$

(E_N est le sous-espace des polynômes trigonométriques défini ci-dessus).

Ceci démontre que $P_+ \bar{\phi}_N P \phi_N \tilde{H}^{2+}$ est fermé, donc

$$\|H^*_{\phi_N} H_{\phi_N}\| < 1.$$

(b) Il existe un nombre α positif tel que $\forall N \in \mathbb{Z}^d_+$, $\|H_{\phi_N}\| \leqslant \alpha < 1$.

Posons $\rho_N = \|H_{\phi_N}\|$, nous avons vu dans *a*) que pour tout $N \in \mathbb{Z}^d_+$, $\rho_N < 1$. Supposons que (ρ_N) ne soit pas uniformément bornée par $\alpha < 1$. Il existera alors une sous-suite infinie (N_k) d'éléments de $\mathbb{Z}_+^d$ et une suite $\psi_k \in L_{N_k}$ avec $\|\psi_k\| = 1$, telles que:

$$\lim_{k \to \infty} \|H_{\phi N_k} \psi_k\| = 1. \tag{1}$$

Posons $\psi'_k = \chi^{N_k} \psi_k$, $\tilde{H}^{2+} = \ker(I - H^*_{\phi_1} H_{\phi_1}) \oplus \operatorname{Im}(I - H^*_{\phi_1} H_{\phi_1})$. Projetons ψ'_k sur le noyau et l'image: $\psi'_k = \psi'_{k,1} + \psi'_{k,2}$, on a:

$$H\phi_{N_k}(\psi_k) = P_- \phi_{N_k} \psi_k = P_- \phi_1 \psi'_{k,1} + P_- \phi_1 \psi'_{k,2}.$$

Comme $\psi'_{k,1} \in \ker(I - H^*_{\phi_1} H_{\phi_1}) = \tilde{H}^{2+} \oplus \bar{\phi}_1 \tilde{H}^{2-}$, on a $P_- \phi_1 \psi'_{k,1} = \phi_1 \psi'_{k,1}$. Il s'ensuit que:

$$\|P_- \phi_1 \psi'_k\|^2 = \|\psi'_{k,1}\|^2 + \|P_- \phi_1 \psi'_{k,2}\|^2 + (\phi_1 \psi'_{k,1}, P_- \phi_1 \psi'_{k,2})$$

mais

$$(\phi_1 \psi'_{k,1}, P_- \phi_1 \psi'_{k,2}) = (\phi_1 \psi'_{k,1}, \phi_1 \psi'_{k,2}) = 0$$

et l'hypothèse (1) devient:

$$\lim_{k \to \infty} (1 - \|\psi'_{k,1}\|^2 - \|P_- \phi_1 \psi'_{k,2}\|^2) = 0. \tag{2}$$

En posant $1 = \|\psi'_{k,1}\|^2 + \|\psi'_{k,2}\|^2 = \|\psi'_k\|^2$, on a:

$$\lim_{k \to \infty} (\|\psi'_{k,2}\|^2 - \|P_- \phi_1 \psi'_{k,2}\|^2) = 0. \tag{3}$$

Montrons maintenant que pour tout k, $\|\psi'_{k,2}\| \neq 0$.

En effet, supposons le contraire, c'est-à-dire que $\psi'_k \in \tilde{H}^{2-} \cap \bar{\phi}_1 \tilde{H}^{2-}$, on a alors

$$P_- \phi_1 \psi'_k = P_- \phi_{N_k} \psi_k = \phi_{N_k} \psi_k = \phi_1 \psi'_k.$$

Cela n'est possible que si $\psi_k \in H^{2+} \cap \phi_{N_k} H^{2-} = (L_{N_k})^\perp$. Comme par ailleurs $\psi_k \in L_{N_k}$ ceci implique $\psi_k = 0$, or $\|\psi_k\| = 1$ par construction, l'hypothèse faite est donc absurde et on a bien $\|\psi'_{k,2}\| \neq 0$, $\forall k$.

Nous déduisons de (3) la relation:

$$\lim_{k \to \infty} \|P_- \phi_1(\psi'_{k,2}/\|\psi'_{k,2}\|)\| = \lim_{k \to \infty} H_{\phi_1}(\psi'_{k,2}/\|\psi'_{l,2}\|)\| = 1, \tag{4}$$

pour une suite $(\psi'_{k,2}/\|\psi'_{k,2}\|)_{k>0}$ dans L_1. Mais ceci équivaudrait au fait que $\|H_{\phi_1}\| = 1$. Ce qui est contraire à ce que nous avons établi dans a).

Montrons (ii)

Nous allons utiliser le lemme 2. Posons

$$\psi_p = \sum_{k=0}^{p} (H^*_{\phi_N} H_{\phi_N})^k P_+ \bar{\phi}_N P\left(\frac{q}{\bar{g}}\right).$$

Les sommes ψ_p vérifient les conditions du lemme 2. Posons $P_+ \bar{\phi}_N \theta_{2,p} = \psi_p$ et $\theta_{1,p} = P_-(q/\bar{g}) - P_-(\phi_N \psi_p)$. (Comme $\psi_p \in \operatorname{Im}(I - H^*_{\phi_N} H_{\phi_N})$, $\theta_{2,p} \in H^{2+}$ existe pour tout p.)

Les sommes ψ_p convergent d'après (i), il s'ensuit que les conditions (i) et (iii) du lemme sont satisfaites.

Étudions la condition (ii) du lemme, on a:

$$P_+(\bar{\phi}_N \theta_{1,p}) + P_+(\bar{\phi}_N \theta_{2,p}) = P_+ \bar{\phi}_N P_- \frac{q}{\bar{g}} - P_+ \bar{\phi}_N P_- \phi_N \psi_p + \psi_p.$$

On a par construction de ψ_p:

$$(I - P_+ \bar{\phi}_N P_- \phi_N)\, \psi_p = (-(I - H^*_{\phi_N} H_{\phi_N})^{p+1})\, P_+ \bar{\phi}_N P\left(\frac{q}{\bar{g}}\right).$$

Le fait que $\|H^*_{\phi_N} H_{\phi_N}\| < 1$, implique (en tenant compte de $P_- = I - P$):

$$\lim_{p \to \infty} (P_+(\bar{\phi}_N \theta_{1,p}) + P_+ \bar{\phi}_N \theta_{2,p})) = P_+(\bar{\phi}_N \psi).$$

Ce qui est la condition (ii) du lemme 2. En tenant compte enfin de la relation:

$$\forall q \in E_N, \qquad (T_N(f))^{-1} q = \frac{1}{g} P_{K_0}\left(\frac{q}{\bar{g}}\right),$$

on obtient l'expression annoncée de l'inverse de $T_N(f)$.

La prochaine étape sera consacrée à l'étude du compotement asymptotique de la trace de $(T_N(f))^{-1}$.

Comportement asymptotique de la trace de $(T_N(f))^{-1}$

I. *Développement asymptotique à l'ordre* 1

(a) *Notations.* Soit $N = (N_j)$, $j = 1, \ldots, d$, un multi-indice dans $\mathbb{Z}^d_+$ ($\mathbb{Z}_+$ est l'ensemble des entiers positifs ou nuls, d entier positif fixe). On considère $\tau_N = \prod_{j=1}^d [0 N_j] \subset \mathbb{Z}^d_+$ et on pose $V(N) = \operatorname{card} \tau_N = \prod_{j=1}^d (N_j + 1)$. On suppose $\lim(N_j) = \infty$, et $\lim_{\inf(N_j) \to \infty} (N_k / V(N)^{1/d}) = \alpha_k \geq 0$, $k = 1, \ldots, d$.

Le symbole Tr signifie trace d'un opérateur (les opérateurs considérés dans la suite seront de rang fini). On rappelle enfin que E_N est l'ensemble des polynômes trigonométriques à spectre contenu dans le multi-rectangle τ_N.

(b) *Résultat.* On a alors un premier théorème qui donne un développement de la trace de $(T_N(f))^{-1}$ à l'ordre 1 (deux termes) et qui est équivalent au théorème de Szegö sur les déterminants.

Ce résultat généralise un peu celui qui a été obtenu dans une précédente note (4), en ce sens que le multi-rectangle τ_N varie différemment suivant les directions de $\mathbb{Z}_+^d$ lorsque $\inf N_j$ tend vers l'infini. Cependant la géométrie du domaine reste simple pour l'instant.

THÉORÈME 1. *On suppose toujours $f=|g|^2$ et $g^{\pm 1}\in H^\infty$. Soit β_m le coefficient de Fourier de $1/g$ au point $m=(m_1,..., m_d)$ de $\mathbb{Z}_+^d$.*

On suppose en outre que $\sum_{m\in\mathbb{Z}_+^d}|\beta_m|<+\infty$ et $\sum_{m\in\mathbb{Z}_+^d}(\sum_{k=1}^d m_k)|\beta_m|^2<\infty$. Soit π_N le projecteur de $L^2(\mathbb{T}^d)$ sur E_N. On pose pour tout $q\in E_N$:

$$A_{N,0}(q)=T_N\left(\frac{1}{f}\right)(q),$$

$$A_{N,1}(q)=-\pi_N\left(\frac{1}{g}P_-\left(\frac{q}{\bar g}\right)+\frac{\chi^{N+1}}{\bar g}P_+\left(\frac{\bar\chi^{N+1}}{g}q\right)\right).$$

Alors

$$\text{(i)}\quad \lim_{\inf N_j\to\infty}\frac{1}{V(N)^{1-1/d}}\operatorname{Tr}((T_N(f))^{-1}-A_{N,0}-A_{N,1})=0,$$

$$\text{(ii)}\quad \lim_{\inf N_j\to\infty}\frac{1}{V(N)^{1-1/d}}\operatorname{Tr}\left((T_N(f))^{-1}-T_N\left(\frac{1}{f}\right)\right)$$
$$=-2\sum_{m\in\mathbb{Z}_+^d}\left(\sum_{k=1}^d\frac{m_k}{\alpha_k}\right)|\beta_m|^2.$$

Preuve (Montrons (i)). Posons $\tilde A_N(q)=\pi_N(q/|g|^2)-\pi_N((1/g)P_-(q/\bar g)+(1/g)P\phi_N P_+\bar\phi_N P(q/\bar g))$ et pour $n\in\tau_N$, $e_n=\chi^n$.

On a d'après la proposition 1,

$$\operatorname{Tr}((T_N(f))^{-1}-\tilde A_N)=\sum_{n\in\tau_N}((T_N(f))^{-1}-\tilde A_N)e_n,e_n)$$
$$=\sum_{n\in\tau_N}\sum_{p=1}^\infty\left\langle(H_{\phi_N}^*H_{\phi_N})^pP_+\bar\phi_NP\left(\frac{e_n}{\bar g}\right),P_+\bar\phi_NP\left(\frac{e_n}{\bar g}\right)\right\rangle$$
$$\leqslant\left(\sum_{p=1}^\infty\|H_{\phi_N}\|^p\right)\sum_{n\in\tau_N}\left\|P_-\phi_NP_+\bar\phi_NP\left(\frac{e_n}{\bar g}\right)\right\|^2.$$

D'après la proposition 1, il existe une constante positive K telle que $\forall N$, $\sum_{p=1}^{\infty} \|H_{\phi_N}\|^p \leqslant K$.

Étudions dans le second membre de l'inégalité la somme étendue à τ_N. On définit, pour $L=(L_1,..., L_d)\in \mathbb{Z}_+^d$, $1/g_L=\sum_{m\in\tau_L} \beta_m \chi^m(\tau_L = \prod_{j=1}^d [0 L_j])$. Comme $1/g \in L^2(\mathbb{T}^d)$ on a $\lim_{\inf L_j\to\infty} \|(1/g)-(1/g_L)\|_2=0$ et d'autre part la condition $\Sigma\ |\beta_m| < +\infty$ implique $\lim_{\inf L_j\to\infty} \|(1/g)-(1/g_L)\|_\infty=0$.

Ces deux limites nous permettront d'approcher $1/g$ par $1/g_L$ dans la suite. La preuve de (i) se fera en deux étapes.

Soit maintenant $L=(L_1,..., L_d)\in\tau_N$, et décomposons τ_N en deux sous-ensembles: $\tau_N=\tau_{N,L}\cup(\tau_N\backslash\tau_{N,L})$ où $\tau_{N,L}=\prod_{j=1}^d [L_j N_j - L_j]$.

Étape 1. Majoration de $(1/V(N)^{1\quad 1/d})\ \sum_{n\in\tau_{N,L}} \|P\quad \phi_N P_+ \bar{\phi}_N P(e_n/g)\|^2$. Utilisant le fait que $P=I-P\quad$, on écrit:

$$P_+\bar{\phi}_N P\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right)=P_+\left(\frac{\bar{\chi}^{N+1}}{g}e_n\right)-P_+\bar{\phi}_N P_-\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right)$$
$$=P_+\left(\frac{\bar{\chi}^{N+1}}{g}e_n\right)-P_+\bar{\chi}^{N+1}\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{g_L}\right)\bar{g}P\quad\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right)$$
$$-P_+\bar{\chi}^{N+1}\frac{\bar{g}}{g_L}P_-\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right).$$

Si $n\in\tau_{N,L}$ alors $P_+\bar{\chi}^{N+1}(g/g_L)\,P_-\,(e_n/\bar{g})=0$. En effet soit $h\in\tilde{H}^{2+}$:

$$\left\langle P_+\bar{\chi}^{N+1}\frac{\bar{g}}{g_L}P_-\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right),h\right\rangle=\left\langle P_-\frac{e_n}{\bar{g}},\chi^{N+1}\frac{g}{\bar{g}_L}h\right\rangle.$$

Comme $1/g_L$ est un polynôme trigonométrique de spectre contenu dans τ_L, on a $\chi^{N+1}(g/g_L)\,h\in\chi^{N+1}\tilde{H}^{2+}$ et $P_-(e_n/\bar{g})\in\chi^n H^{2-}$, mais $H^{2-}=(\tilde{H}^{2+})^{\perp}$, il s'ensuit que le produit scalaire ci-dessus est nul pour $n_j<N_j+1-L_j$ $(j=1,..., d)$ et en particulier pour $n\in\tau_{N,L}$.

On a d'autre part:

$$P_-\phi_N P_+\bar{\phi}_N P\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right)$$
$$=P_-\phi_N P_+\left(\frac{\bar{\chi}^{N+1}}{g}e_n\right)-P\phi_N P_+\chi^{N+1}\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{g_L}\right)\bar{g}P_-\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right)$$

on procède comme ci-dessus et on écrit:

$$P_-\phi_N P_+\left(\frac{\bar{\chi}^{N+1}}{g}e_n\right)=P_-\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{g_L}\right)\bar{g}\chi^{N+1}P_+\left(\frac{\bar{\chi}^{N+1}}{g}e_n\right)$$
$$+P_-\chi^{N+1}\frac{\bar{g}}{g_L}P_+\frac{\bar{\chi}^{N+1}}{g}e_n,$$

et on remarque que $P_-\chi^{N+1}\bar{g}/g_L\,P_+(\bar{\chi}^{n+1}/g)\,e_n=0$, si $n_j>L_j$ $(j=1,..., d)$.
Ainsi pour $n\in\tau_{N,L}$ on a la majoration suivante

$$\sum_{n\in\tau_{N,L}}\left\|P_-\phi_N P_+\tilde{\phi}_N P\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right)\right\|^2$$
$$\leqslant\sum_{n\in\tau_{N,L}}\left\|P_-\left(\frac{1}{\bar{g}}-\frac{1}{\bar{g}_L}gP_+\left(\frac{\bar{\chi}^{N+1}}{g}\right)\right\|^2$$
$$+\sum_{n\in\tau_{N,L}}\left\|P_-\phi_N P_+\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{g_L}\right)\bar{g}\bar{\chi}^{N+1}P_-\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right)\right\|^2$$
$$\leqslant\left\|\frac{1}{g}-\frac{1}{g_L}\right\|_\infty\|g\|_\infty\left(\sum_{n\in\tau_{N,L}}\left\|P_+\left(\frac{\bar{\chi}^{N+1}}{g}e_n\right)\right\|^2+\sum_{n\in\tau_{N,L}}\left\|P_-\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right)\right\|^2\right).$$

On remarque que $\|P_+(\bar{\chi}^{(N+1)}/g)\,e_n\|^2=\sum_{m\in\mathbb{Z}_+^d\setminus\tau_{n'}}|\beta_m|^2$ $(\tau_{n'}=\prod_{j=1}^d[0n_j'])$, $n'=N-n$, et

$$\left\|P_-\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right)\right\|^2=\sum_{m\in\mathbb{Z}_+^d\setminus\tau_n}|\beta_m|^2.$$

On obtient alors $\sum_{n\in\tau_{N,L}}\|P_+((\bar{\chi}^{N+1}/g)\,e_n)\|^2=\sum_{n\in\tau_{N,L}}\|P_-(e_n/g)\|^2$. On peut d'ailleurs majorer ces sommes par des sommes étendues à τ_N et on a:

$$\frac{1}{V(N)^{1-1/d}}\sum\left\|P_-\phi_N P_+\bar{\phi}_N P\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right)\right\|^2$$
$$\leqslant\left(\left\|\frac{1}{g}-\frac{1}{g_L}\right\|_\infty\|g\|_\infty\right)\left(\frac{1}{V(N)^{1-1/d}}\sum\left\|P_-\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right)\right\|^2\right)$$

dans la partie (ii) nous montrerons que

$$\lim_{\inf N_j\to\infty}\frac{1}{V(N)^{1-1/d}}\sum_{n\in\tau_N}\left\|P_-\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right)\right\|^2=\text{cte}.$$

En faisant tendre inf N_j et inf L_j vers l'infini on obtient:

$$\lim_{\inf N_j\to\infty}\frac{1}{V(N)^{1-1/d}}\sum_{n\in\tau_{N,L}}\left\|P_-\phi_N P_+\bar{\phi}_N P\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right)\right\|^2=0$$

ce qui achève l'étape 1.

Étape 2. Majoration de:

$$\frac{1}{V(N)^{1-1/d}} \sum_{n \in \tau_N \setminus \tau_{N,L}} \left\| P_- \phi_N P_+ \bar{\phi}_N P\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right)\right\|^2 .$$

Posons $\phi_{N,L} = (g_L/\bar{g}_L)\,\chi^{N+1}$. On a

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{n \in \tau_N \setminus N,L} \left\| P_- \phi_N P_+ \bar{\phi}_N P\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right) - P \;\; \phi_{N,L} P_+ \bar{\phi}_{N,L} P\left(\frac{e_n}{\bar{g}_L}\right)\right\|^2\right)^{1/2} \\
&\quad \leqslant \left(\sum_{n \in \tau_N \setminus \tau_{N,L}} \left\| P_- \phi_N P_+ \bar{\phi}_N P\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right) - P_- \phi_N P_+ \bar{\phi}_N P\left(\frac{e_n}{\bar{g}_L}\right)\right\|^2\right)^{1/2} \\
&\quad + \left(\sum_{n \in \tau_N \setminus \tau_{N,L}} \left\| P_- \phi_N P_+ \bar{\phi}_N P\left(\frac{e_n}{\bar{g}_L}\right) - P \;\; \phi_N P_+ \bar{\phi}_{N,L} P\left(\frac{e_n}{\bar{g}_L}\right)\right\|^2\right)^{1/2} \\
&\quad + \left(\sum_{n \in \tau_N \setminus \tau_{N,L}} \left\| P_- \phi_N P_+ \bar{\phi}_{N,L} P\left(\frac{e_n}{\bar{g}_L}\right) - P_- \phi_{N,L} P_+ \bar{\phi}_{N,L} P\left(\frac{e_n}{\bar{g}_L}\right)\right\|^2\right)^{1/2}
\end{aligned} \tag{2.1}$$

tenant compte de $\|\phi_N - \phi_{N,L}\|_\infty \leqslant 2\,\|(1/g_L)\|_\infty \,\|(1/g) - (1/g_L)\|_\infty$. L'expression (2.1) ci-dessus est majorée par

$$(\operatorname{card}(\tau_N \setminus \tau_{N,L}))^{1/2} \left(\left\|\frac{1}{g} - \frac{1}{g_L}\right\|_2 + 4\left\|\frac{1}{g} - \frac{1}{g_L}\right\|_\infty \left\|\frac{1}{g_L}\right\|_\infty^2\right).$$

On obtient la majoration suivante

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{n \in \tau_N \setminus N,L} \left\| P_- \phi_N P_+ \bar{\phi}_N P\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right)\right\|^2\right)^{1/2} \\
&\quad \leqslant \left(\sum_{n \in \tau_N \setminus \tau_{N,L}} \left\| P_- \phi_{N,L} P_+ \bar{\phi}_{N,L} P\left(\frac{e_n}{\bar{g}_L}\right)\right\|^2\right)^{1/2} \\
&\quad + (\operatorname{card}(\tau_N \setminus \tau_{N,L}))^{1/2} \left(\left\|\frac{1}{g_L} - \frac{1}{g}\right\|_2 + 4\left\|\frac{1}{g_L}\right\|_\infty^2 \left\|\frac{1}{g} - \frac{1}{g_L}\right\|_\infty\right).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Majoration de $\sum_{n \in \tau_N \setminus \tau_{N,L}} \|P_- \phi_{N,L} P_+ \bar{\phi}_{N,L} P((e_n/\bar{g}_L))\|^2$. Quelques remarques d'abord, on écrit:

$$P_+ \bar{\phi}_{N,L} P\left(\frac{e_n}{\bar{g}_L}\right) = P_+\left(\frac{\bar{\chi}^{N+1}}{g_L} e_n\right) - P_+ \bar{\phi}_{N,L} P_-\left(\frac{e_n}{\bar{g}_L}\right),$$

or $\forall h \in \tilde{H}^{2-}$,

$$\left\langle P_{-}\left(\frac{e_n}{\bar{g}_L}\right), h\right\rangle = \left\langle e_n, \frac{h}{g_L}\right\rangle = 0 \qquad \text{si } n_i > L_i$$

de même $P_{+}((\bar{\chi}^{-N+1}/g_L)\, e_n) = 0$ si $n_i < N_i - L_i$ $(i = 1,..., d)$.

D'autre part $P_{-}\phi_{N,L} P_{+}(\bar{\chi}^{-N+1}/g_L)\, e_n) = 0$ si $n_i > L_i$, $i = 1,..., d$. En effet soit $h \in \tilde{H}^{2-}$

$$\left\langle P_{-}\phi_{N,L} P_{+} \frac{\bar{\chi}(N+1)}{g_L} e_n, h\right\rangle = \left\langle P_{+} \frac{\bar{\chi}^{N+1}}{g_L} e_n, \chi^{-(N+1)} \frac{\bar{g}_L}{g_L} h\right\rangle.$$

Comme $1/g_L$ est un polynôme trigonométrique de spectre contenu dans $\prod_{j=1}^{d} [0L_j]$, $\chi^{-(N+1)}(\bar{g}_L/g_L)\, h \in \chi^{-(N+1)+L}\, \tilde{H}^{2-}$, d'autre part $P_{+}((\chi^{-(N+1)/g)}\, e_n) \in \chi^{-(N+1)+n} H^{2+}$ et les deux sous-espaces sont orthogonaux si $n_i \geqslant L_i$, $i = 1,..., d$.

On a aussi $P_{+}\bar{\phi}_{N,L} P_{-}(e_n/g_L) = 0$, si $n_i \leqslant N_i - L_j$. En effet, soit $h \in \tilde{H}^{2+}$,

$$\left\langle P_{+}\bar{\phi}_{N,L} P_{-} \frac{e_n}{g_L}, h\right\rangle = \left\langle P_{-} \frac{e_n}{\bar{g}_L}, \frac{g_L}{\bar{g}_L} \chi^{N+1} h\right\rangle.$$

Comme ci-dessus on a $P_{-}(e_n/g_L) \in \chi^n H^{2-}$ et $(g_L/\bar{g}_L)\, \chi^{N+1}\; h \in \chi^{N+1-L}$ $\tilde{H}^{2+}$ et ces deux sous-espaces sont orthogonaux si $n_i \leqslant N_i - L_i$.

Ces remarques montrent alors que $P_{-}(\phi_{N,L} P_{+} \bar{\phi}_{N,L} P(e_n/\bar{g}_L))$ est nul si $n \notin S_{N,2}$, avec

$$S_{N,2} = \tau_N \Bigg\backslash \left(\left(\prod_{j=1}^{d} [0N_j - L_j]\right) \cup \prod_{j=1}^{d} [L_j N_j]\right).$$

L'étude de la somme précédente se réduit à l'étude de la somme sur $S_{N,2}$ et on a la majoration suivante:

$$\left(\sum_{n \in \tau_{N,L}} \left\| P_{-}\phi_{N,L} P_{+} \bar{\phi}_{N,L}\, P\left(\frac{e_n}{\bar{g}_L}\right)\right\|\right)^{1/2} \leqslant (\text{card } S_{N,2})^{1/2} \left\|\frac{1}{g_L}\right\|_2.$$

On en déduit la majoration cherchée.

$$\left(\frac{1}{V(N)^{1-1/d}} \sum_{n \in \tau_{N,L}} \left\| P_{-}\phi_N P_{+} \bar{\phi}_N\, P\left(\frac{e_n}{g_L}\right)\right\|^2\right)^{1/2}$$

$$\leqslant \left\|\frac{1}{g_L}\right\|_2 \left(\frac{\text{card } S_{N,2}}{V(N)^{1-1/d}}\right)^{1/2} + \left(\frac{\text{card } \tau_N \backslash \tau_{N,L}}{V(N)^{1-1/d}}\right)^{1/2}$$

$$\times \left(\left\|\frac{1}{g_L} - \frac{1}{g}\right\|_2 + 4 \left\|\frac{1}{g_L}\right\|_\infty^2 \left\|\frac{1}{g} - \frac{1}{g_L}\right\|_\infty\right)$$

Nous allons montrer que le 2[e] membre tend vers 0 quand $\inf_{j=1,\ldots,d} N_j \to \infty$ et $\inf L_j \to \infty$.

Évaluons card $S_{N,2}$:

$$S_{N,2} = \{n = (n_1, \ldots, n_d) \in \tau_N / \exists (i,j),\ i \neq j;\quad (n_i, n_j) \in [0 L_i] \times [N_j - L_j + 1 N_j]\}$$

mais $\operatorname{card}([0L_i] \times [N_j - L_{j+1} N_j] \times \prod_{(k,k) \neq (i,j), k=1}^{d} [0N_k]) = L_i L_j \prod_{(k,k) \neq (i,j), k=1}^{d} (N_k + 1)$. Or $S_{N,2}$ est formé d'une réunion finie de tels sous-ensembles.

On en déduit que

$$\lim_{\inf N_j \to \infty} \frac{\operatorname{card} S_{N,2}}{V(N)^{1-1/d}} = \lim_{\inf N_j \to \infty} \frac{\operatorname{card} S_{N,2}}{\prod_{j=1}^{d} (N_j + 1)^{1-1/d}} = 0.$$

Calculons maintenant

$$\lim_{\inf N_j \to \infty} \frac{\operatorname{card} \tau_N \backslash \tau_{N,L}}{V(N)^{1-1/d}},$$

$$\lim_{\inf N_j \to \infty} \frac{\operatorname{card}(\tau_N / \tau_{N,L})}{V(N)^{1-1/d}} = \lim_{\inf N_j \to \infty} \frac{\prod_{j=1}^{d} (N_j + 1) - \prod_{j=1}^{d} (N_j - 2L_j)}{(\prod_{j=1}^{d} (N_j + 1))^{1-1/d}}.$$

Les L_j étant fixés il est clair que cette limite est bornée. On obtient finalement, en faisant tendre aussi $\inf L_j$ vers l'infini:

$$\lim_{\inf N_j \to \infty} 1/V(N)^{1-1/d} \left(\sum_{n \in \tau_N \backslash \tau_{N,L}} \left\| P_- \phi_N P_+ \bar{\phi}_N P\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right) \right\|^2 \right) = 0$$

ce qui achève l'étape 2.

Les résultats des étapes 1 et 2 montrent que

$$\lim_{\inf N_j \to \infty} 1/V(N)^{1-1/d} \sum_{n \in \tau_N \backslash \tau_{N,L}} \left\| P_- \phi_N P_+ \bar{\phi}_N P\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right) \right\|^2 = 0$$

ce qui prouve (i).

Montrons (ii). Calcul de $\lim_{\inf N_j \to \infty} 1/V(N)^{(1-1/d)} \sum_{n \in \tau_N} \| P_-(e_n/\bar{g}) \|^2$. On a vu précédemment que

$$\left\| P_- \left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right) \right\|^2 = \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^d \backslash \tau_n} |\beta_m|^2 \qquad \left(\tau_n = \prod_{j=1}^{d} [0, n_j]\right).$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe un élément $L \in \mathbb{Z}_+^d$ tel que $\sum_{m \notin \tau_L} (\sum_{i=1}^{d} m_i) |\beta_{m_1, \ldots, m_d}|^2 < \varepsilon$.

Ceci découle des hypothèses du théorème, soit N tel que $L \in \tau_N$. Soit à étudier la somme

$$\sum_{n \in \tau_N} \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \tau_n} |\beta_m|^2. \tag{1}$$

Décomposons cette somme sur $\tau_N = \tau_L \cup (\tau_N \setminus \tau_L)$, on obtient:

$$\sum_{n \in \tau_L} \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \tau_n} |\beta_m|^2 + \sum_{C \subset \{1,..., d\}} \sum_{n \in \mathscr{A}_N(C)} \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \tau_n} |\beta_m|^2 \tag{2}$$

où card $C \geqslant 1$ et $\mathscr{A}_N(C) = \{n \in \tau_N, \forall l \in C, n_l > L_l\}$.

Comme par hypothèse $\sum_{m \in \mathbb{Z}_+^d} |\beta_m|^2$ est finie et card τ_L ne dépend que de L, la première somme dans (2) est finie et ne dépend pas de $N = (N_1,..., N_d)$.

Étudions la deuxième somme de (2). Nous avons:

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \tau_n} |\beta_m|^2 = \sum_{B \subset \{1,..., d\}} \left(\sum_{\substack{i \in B^c \\ m_i \leqslant n_i}} \sum_{\substack{j \in B \\ m_j > n_j}} |\beta_{m_1,..., m_d}|^2 \right)$$

où $B^c = \{1,..., d\} \setminus B$.

Fixons C tel que card $C = d-1$ et $B = \{l_0\} = \{1,..., d\} \setminus C$ et notons par $I(B, C)$ la somme suivante

$$I(B, C) = \sum_{n \in \mathscr{A}_N(C)} \sum_{\substack{i \in B^c = C \\ m_i \leqslant n_i}} \sum_{m_{l_0} \geqslant n_{l_0}} |\beta_m|^2 = \sum_{l \in C} \sum_{\substack{L_l \leqslant n_l \leqslant N_l - L_l \\ m_l \leqslant n_l}} \sum_{\substack{m_{l_0} > n_{l_0} \\ 0 \leqslant n_{l_0} \leqslant L_{l_0}}} |\beta_m|^2. \tag{3}$$

Pour n fixé dans $\mathscr{A}_N(C)$, considérons la somme suivante:

$$\sum_{\substack{l \in C \\ m_l \leqslant n_l}} \sum_{\substack{m_{l_0} > n_{l_0} \\ 0 \leqslant n_{l_0} \leqslant L_{l_0}}} |\beta_m|^2 = \sum_{m_l \leqslant L_l} \sum_{\substack{m_{l_0} > n_{l_0} \\ 0 \leqslant n_{l_0} \leqslant n_{l_0}}} |\beta_m|^2 + \sum_{\substack{L_l < n_l \leqslant N_l m_{l_0} > n_{l_0} \\ 0 \leqslant n_{l_0} \leqslant L_{l_0}}} |\beta_m|^2. \tag{4}$$

La première quantité du second membre de (4) s'écrit:

$$\sum_{m_l \leqslant L_l} \left(\sum_{m_{l_0} \leqslant l_0} m_{l_0} |\beta_m|^2 + (L_{l_0} + 1) \sum_{m_{l_0} > L_{l_0}} |\beta_m|^2 \right)$$

$$= \sum_{m_l \in \tau_L} m_{l_0} |\beta_m|^2 + (L_{l_0} + 1) \sum_{\substack{m_{l_0} > L_{l_0} \\ m_l \leqslant L_l}} |\beta_m|^2$$

Mais $(L_{l_0} + 1) \sum_{m_{l_0} > L_0, m_l < L_l} |\beta_m|^2 \leqslant \sum_{m_{l_0} > L_{l_0}, m_l \geqslant 0} m_{l_0} |\beta_m|^2$.

Or L a été choisi de sorte que $\sum_{m_{l_0} > L_{l_0}, m_l \geqslant 0} m_{l_0} |\beta_m|^2 < \varepsilon$. La deuxième quantité du 2ème membre de (4) se traite de la même manière:

$$\sum_{L_l < m_l \leqslant N_l} \sum_{\substack{m_{l_0} > n_{l_0} \\ 0 \leqslant n_{l_0} \leqslant L_{l_0}}} |\beta_m|^2 \leqslant \sum_{0 \leqslant n_{l_0} \leqslant L_0} \Bigg(\sum_{\substack{m_{l_0} \geqslant n_{l_0} \\ L_l \leqslant m_l \leqslant N_l}} |\beta_m|^2 \Bigg)$$

$$\leqslant \sum_{0 \leqslant n_{l_0} \leqslant L_{l_0}} \Bigg(\sum_{\substack{m_{l_0} \geqslant 0 \\ L_l \leqslant m}} |\beta_m|^2 \Bigg) \leqslant (L_{l_0} + 1)\, \varepsilon.$$

Pour évaluer (3) il faut sommer (4) sur $n' \in \prod_{l \in C} [L_l N_l - L_l]$. Mais toutes les quantités dans (4) sont majorées indépendamment de N. On a alors

$$\left| I(B, C) - \Bigg(\sum_{m \in \tau_L} m_{l_0} |\beta_m|^2 \Bigg) \operatorname{card} \Bigg(\prod_{l \in C} [L_l N_l] \Bigg) \right|$$

$$\leqslant \operatorname{card} \prod_{l \in C} [L_l N_l] \cdot (L_{l_0} + 2)\, \varepsilon.$$

Passons aux limites avec $\inf N_j \to \infty$:

$$\lim_{\inf N_j \to \infty} \Bigg(\operatorname{card} \prod_{l \in C} [L_l N_l] \Bigg) \Big/ V(N)^{1 - 1/d}$$

$$= \lim_{\inf N_j \to \infty} \prod_{l \in C} (N_l - L_l) \Big/ \Bigg(\prod_{j=1}^{d} (N_j + 1) \Bigg)^{1 - 1/d}$$

$$= \prod_{j \neq l_0} \alpha_j.$$

Il vient donc en faisant tendre $\inf N_j$ et $\inf L_j$ vers l'infini

$$\lim_{\inf N_j \to \infty} (I(B, C)\, 1/V(N)^{1 - 1/d} = \prod_{\substack{j \neq l_0 \\ j = 1}}^{d} \alpha_j \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^d} m_{l_0} |\beta_m|^2.$$

Examinons maintenant la situation où B et C sont des parties quelconques de $\{1, ..., d\}$ et ne vérifiant que $B \cap C \neq \varnothing$. Soit toujours l_0 un point de $B \cap C$.

La modification dans l'expression $I(B, C)$, que l'on notera alors $\tilde{I}(B, C)$, dans (3) est la suivante:

$$\sum_{\substack{m_{l_0} > n_{l_0} \\ 0 \leqslant n_{l_0} \leqslant L_{l_0}}} |\beta_m|^2 \qquad \text{devient} \qquad \sum_{\substack{m_0 > n_{l_0} \\ L_{l_0} < n_{L_0} \leqslant N_{l_0}}} |\beta_m|^2$$

ceci grâce à la définition de $\mathscr{A}_N(C)$, expression qui est par ailleurs majorée par $\sum_{m_{l_0} > L_{l_0}} m_{l_0} \, |\beta_m|^2$.

L'expression correspondant à (4) est majorée par $\sum_{m_l \geqslant 0} \sum_{m_{l_0} > L_{l_0}} m_{l_0} \, |\beta_m|^2$ qui est par hypothèse inférieure à ε.

Enfin l'expression correspondant à (3) est majorée par $(\prod_{l \in \{1,\ldots,d\} \setminus l_0} (N_l - L_l)) \, \varepsilon$ et on obtient en faisant tendre $\inf N_j$ et $\inf L_j$ vers l'infini:

$$\lim_{\inf N_j \to \infty} 1/V(N)^{1-1/d} \, \tilde{I}(B, C) = 0.$$

Les limites qui sont différentes de 0 correspondent aux choix de $\operatorname{card} C = d-1$ et $B = \{1,\ldots, d\} \setminus C = \{l_0\}$. Il suffit de faire varier l_0 dans $\{1,\ldots, d\}$ pour couvrir toutes les situations et comme par ailleurs dans le cas où les limites sont nulles le choix de B et C est fini on obtient finalement:

$$\lim_{\inf N_j \to \infty} 1/V(N)^{1-1/d} \sum_{n \in \tau_N} \left\| P_- \left(\frac{e_n}{\bar{g}} \right) \right\|^2 = \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^d} \left(\sum \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{d} \alpha_j \right) m_k \Big) \, |\beta_{m_1,\ldots,m_d}|^2.$$

Pour achever la démonstration de (ii), il reste à montrer que:

$$\lim_{\inf N_j \to \infty} 1/V(N)^{1-1/d} \times \left(\sum_{n \in \tau_N} \left\langle \frac{1}{g} P \phi_N P_+ \bar{\phi}_N P \left(\frac{e_n}{\bar{g}} \right) - \frac{\chi^{N+1}}{\bar{g}} P_+ \frac{\bar{\chi}^{N+1}}{g} e_n, e_n \right\rangle \right) = 0. \quad (5)$$

La somme dans (5) s'écrit:

$$\sum_{n \in \tau_N} \left(\left\| P_+ \bar{\phi}_N P \left(\frac{e_n}{g} \right) \right\|^2 - \left\| P_+ \left(\frac{\bar{\chi}^{N+1}}{g} e_n \right) \right\|^2 \right) \quad (6)$$

Posons, $\forall q \in E_N$,

$$W_N(q) = U_N(q) - V_N(q) = \pi_N P_+ \bar{\phi}_N P \left(\frac{q}{\bar{g}} \right) - \pi_N P_+ \left(\frac{\bar{\chi}^{N+1} q}{g} \right).$$

Comme $P_- = I - P$, on a aussi

$$W_N(q) = \pi_N \left(P_+ \bar{\phi}_N P_- \left(\frac{q}{\bar{g}} \right) \right)$$

L'expression (6) devient alors

$$\|U_N\|^2_{\mathrm{H.S}} - \|V_N\|^2_{\mathrm{H.S}} = (\|U_N\|_{\mathrm{H.S}} - \|V_N\|_{\mathrm{H.S}})(\|U_N\|_{\mathrm{H.S}} + \|V_N\|_{\mathrm{H.S}}) \tag{7}$$

(H.S = norme Hilbert–Schmidt de l'opérateur).

L'expression (7) est alors majorée en valeur absolue par:

$$\|W_N\|_{\mathrm{H.S}}(\|W_N\|_{\mathrm{H.S}} + 2\,\|V_N\|_{\mathrm{H.S}}) \tag{8}$$

avec

$$\|V_N\|^2_{\mathrm{H.S}} = \sum_{n \in \tau_N} \left\| P_+ \left(\frac{\bar{\chi}^{N+1} e_n}{g} \right) \right\|^2 = \sum_{n \in \tau_N} \left\| P_- \left(\frac{e_n}{\bar{g}} \right) \right\|^2$$

et

$$\|W_N\|^2_{\mathrm{H.S}} = \sum_{n \in \tau_N} \left\| P_+ \bar{\phi}_N P_- \left(\frac{e_n}{\bar{g}} \right) \right\|^2.$$

Il faut maintenant calculer

$$\lim_{\inf N_j \to \infty} 1/V(N)^{1-1/d} \|V_N\|^2_{\mathrm{H.S}} \text{ et } \lim_{\inf N_j \to \infty} 1/V(N)^{1-1/d} \|W_N\|^2_{\mathrm{H.S}}$$

La première limite, qui a été établie précédemment, est finie. Étudions la seconde limite:

Dans (i) nous avons décomposé $\tau_N = \tau_{N,L} U(\tau_N \backslash \tau_{N,L})$. Pour $n \in \tau_{N,L}$, on obtenait:

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{n \in \tau_{N,L}} \left\| P_+ \frac{\bar{g}}{g} \bar{\chi}^{N+1} P_- \left(\frac{e_n}{\bar{g}} \right) \right\|^2 \right)^{1/2} \\
&\quad \leqslant \left(\sum_{n \in \tau_{N,L}} \left\| P_+ \left(\frac{1}{g} - \frac{1}{g_L} \right) \bar{g} \bar{\chi}^{N+1} P_- \left(\frac{e_n}{\bar{g}} \right) \right\|^2 \right)^{1/2} \\
&\quad\quad + \left(\sum_{n \in \tau_{N,L}} \left\| P_+ \frac{\bar{g}}{g_L} \bar{\chi}^{N+1} P_- \left(\frac{e_n}{\bar{g}} \right) \right\|^2 \right)^{1/2} \\
&\quad \leqslant \left\| \frac{1}{g} - \frac{1}{g_L} \right\|_\infty \left(\sum_{n \in \tau_{N,L}} \left\| P_- \left(\frac{e_n}{\bar{g}} \right) \right\|^2 \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

On obtient alors, comme dans (i), lorsque $\inf N_j$ et $\inf L_j$ ($L_j \leqslant N_j$) tendent vers l'infini:

$$\lim_{\inf N_j \to \infty} 1/V(N)^{1-1/d} \left(\sum_{n \in \tau_{N,L}} \left\| P_+ \bar{\phi}_N P_- \left(\frac{e_n}{\bar{g}} \right) \right\|^2 \right) = 0.$$

Pour $n \in \tau_N \backslash \tau_{N,L}$, on approxime $\|P_+ \bar{\phi}_N P_-(e_n/g)\|$ par $\|P_+ \bar{\phi}_L P_-(e_n/\bar{g}_L)\|$, puis on évalue

$$1/V(N)^{1-1/d} \sum_{n \in \tau_N \backslash \tau_{N,L}} \left\| P_+ \bar{\phi}_L P_- \left(\frac{e_n}{\bar{g}_L} \right) \right\|^2. \tag{9}$$

Comme précédemment, $1/g_L$ étant un polynôme trigonométrique de spectre dans τ_L, $P_+ \bar{\phi}_L P(e_n/\bar{g}_L)$ est nul si $n \notin S_{N,2} = \tau_N \backslash (\prod_{j=1}^d [0\, N_j - L_j] \times \prod_{j=1}^d [L_j\, N_j])$.

L'expression (9) est majorée par:

$$\operatorname{card} S_{N,2}/V(N)^{1-1/d} \cdot \left\| \frac{1}{g_L} \right\|_2^2,$$

quantité qui tend vers 0 lorsque $\inf N_{j \to \infty}$, comme cela a été établi ci-dessus.

Ce qui précède montre alors que la limite dans (5) est bien nulle, ce qui achève de démontrer (ii) puis le théorème.

II. Développement asymptotique à l'ordre $d \geqslant 1$, de $(T_N(f))^{-1}$

Nous donnerons dans cette partie un développement asymptotique à l'ordre d (d = dimension de $\mathbb{Z}^d$) de l'opérateur $(T_N(f))^{-1}$ relativement au cardinal de $\tau_N = \prod_{j=1}^d [0 N_j]$, qui tendra vers l'infini.

Ce développement comporte $d+1$ opérateurs. Ceci nous permettra d'obtenir le développement asymptotique à l'ordre d de la trace de $(T_N(f))^{-1}$.

Notations. Les opérateurs A_N et $A_{N,k}$, $k = 1,..., d$. Pour tout polynôme trigonométrique $q \in E_N$ on définit:

$$A_N(q) = \frac{1}{g} P\phi_N (I - H^*_{\phi_N} H_{\phi_N})^{-1} P_+ \bar{\phi}_N P \left(\frac{q}{\bar{g}} \right).$$

Soit $L = (L_1,..., L_d) \in \mathbb{Z}^d_+$. On suppose que $1/g$ est un polynôme trigonométrique qui s'écrit:

$$\frac{1}{g} = \sum \beta_m \chi^m, \qquad m = (m_1,..., m_d) \in \tau_L = \prod_{j=1}^d [0 L_j].$$

Soit $N = (N_1,..., N_d)$, tel que $\forall i$, $2L_i \leqslant N_i$. On définit les intervalles d'entiers I_i par $I_i = [0 L_i - 1]$ ou $I_i = [N_i - L_i N_i]$.

Soit $B \subset \{1,..., d\}$ et card $B = k \leqslant d$, on définit les sous-ensembles $T_{N,k}$ de τ_N de la façon suivante: $T_{N,k} = \bigcup_{B \subset \{1,...,d\}} t_{n,k}$ où $t_{n,k}$ est le sous-ensemble: $t_{n,k} = \{n = (n_l) \in \tau_N : \forall j \in B,\ n_j \in I_j$ et $\exists (l, l') \in B \times B$, tel que

$$I_l = [0 L_l - 1] \qquad \text{et} \qquad I_{l'} = [N_{l'} - L_{l'} + 1\, N_{l'}].$$

Les sous-ensembles $E_{N,k}$ de E_N. On pose $S_{N,k} = T_{N,k} \backslash T_{N,k+1}$ pour $2 \leqslant k \leqslant d-1$, et $S_{N,d} = T_{N,d}$ et on définit $E_{N,k} \subset E_N$, comme sous-ensemble de polynômes trigonométriques à spectre contenu dans $S_{N,k}$ et enfin les opérateurs $A_{N,k}$ sont les restrictions de A_N à $E_{N,k}$.

L'opérateur $E_L \ni q \to P_c H_{\phi_{2L}} \cdot P_+ \bar{\phi}_{2L} P(q/\bar{g})$.

On rappelle que $H_{\phi_{2L}} P_+ \bar{\phi}_{2L} P(q/\bar{g}) = P_-(g/\bar{g})\, \bar{\chi}^{2L+1} P_+(\bar{g}/g)\, \chi^{2L+1} P(q/\bar{g})$.

Soient C et C' deux sous-ensembles de $\{1,..., d\}$ tels que $C \cap C' = \phi$, card $C \leqslant k$ card $C' = d-k$. On pose:

$$\Omega(C, C') = \prod_{i \in C} [0 L_i] \prod_{j \in \{1,..., d\} \backslash C \cup C'} [L_j + 1\ 2L_j] \prod_{l \in C'} \{L_l\}.$$

Soit maintenant le sous-ensemble de $\mathbb{Z}^d$ défini de la façon suivante:

$$\mathbb{Z}(C) = \{(m_1,..., m_d)\, \mathbb{Z}^d_- : \exists i \in C, m_i < 0\} (\tilde{\mathbb{Z}}^d = \mathbb{Z}^d \backslash \mathbb{Z}^d_+)$$

ce qui permet de définir:

$$H^{2-}(C) = \{h \in \tilde{H}^{2-} ; \hat{h}(m) = 0, \text{ si } m \notin \mathbb{Z}(C)\}$$

et enfin l'opérateur P_c est le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbb{T}^d)$ sur $H^{2-}(C)$, ceci donne un sens à l'opérateur ci-dessus: (On rappelle que $V(N) = \prod_{i=1}^d (N_i + 1)$). On peut énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Soit $f = |g|^2$, $g^{\pm 1} \in H^\infty$, on suppose $1/g = \sum_{m \in \mathbb{Z}^d_+} \beta_m \chi^m$ est un polynôme trigonométrique de spectre contenu dans $\tau_L = \prod_{i=1}^d [0 L_i]$.*
Alors pour $k = 0,..., d$

(i) $\lim_{\inf N_j \to \infty} (1/V(N)^{1-(k+1)/d}) \operatorname{Tr}[(T_N(f))^{-1} - \sum_{l=0}^k A_{N,l}] = 0$.

(ii) *Les limites suivantes existent*: $(k \geqslant 2)$,

$$a_k = \lim_{\inf N_j \to \infty} \frac{1}{V(N)^{1-k/d}} \operatorname{Tr}(A_{N,k})$$
$$= \sum_{C' \subset \{1,..., d\},\, \operatorname{card} C' = k} \left(\prod_{l \in C'} \alpha_l\right) \sum_{C \subset \{1,..., d\} \backslash C'}$$
$$\times \sum_{n \in \Omega(C, C')} \left\| P_c H_{\phi_{2L}} P_+ \bar{\phi}_{2L} P\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right)\right\|^2$$

et

$$\operatorname{Tr}(T_N(f))^{-1} = a_0 \prod_{i=1}^d (N_i + 1) + a_1 (\Pi(N_i + 1))^{(d-1)/d} + \cdots$$
$$+ a_{d-1} (\Pi(N_i + 1))^{1/d} + a_d + o(1).$$

Preuve du théorème 2. Montrons (i). On a, par définition des opérateurs $A_{N,k}$ pour $k \geqslant 2$:

$$\left((T_N(f))^{-1} - \sum_{l=0}^{k} A_{N,l}\right) = \sum_{l=k+1}^{d} A_{N,l}.$$

Cet opérateur ainsi obtenu est la restriction de l'opérateur A_N sur le sous-ensemble de E_N, de polynômes trigonométriques à spectre dans $T_{N,k+1}$.

Soit $e_n = \chi^n = \chi_1^{n_1} \cdots \chi_d^{n_d}$. On a:

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr} \sum_{l=k+1}^{d} A_{N,l} &= \sum_{n \in T_{N,k+1}} \langle A_N e_n, e_n \rangle \\ &= \sum_{n \in T_{N,k+1}} \sum_{p=1} \left\langle (H_{\phi_N}^* H_{\phi_N})^p P + \bar{\phi}_N P\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right), P_+ \bar{\phi}_N P\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right)\right\rangle. \quad (1)\end{aligned}$$

On peut majorer la trace dans (1), par:

$$\mathrm{T_r} \sum_{l=k+1}^{d} A_{N,l} \leqslant \sum_{p=1}^{\infty} \|H_{\phi_N}\|^{2p} \sum_{n \in T_{N,k+1}} \left\| P_+ \bar{\phi}_N P\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right)\right\|^2.$$

1ère étape. Majoration de $\sum_{n \in T_{N,k+1}} \| P_+ \bar{\phi}_N P((e_n/\bar{g}))\|^2$ (1).

D'après la définition de $T_{N,k+1}$ et $t_{N,k+1}$, il suffit d'étudier cette somme sur $t_{N,k+1}$ (qui est fixe grâce au choix de $B \subset \{1,..., d\}$ et card $B = k+1$).

Soit C_1, C_2, C_3 une partition de $\{1,..., d\}$. On suppose en outre que $C_1 \cup C_2 \supset B$.

Soit $n = (n_1,..., n_d) \in t_{N,k}$ vérifiant les conditions:

$$\forall i \in C_1, 0 \leqslant n_i \leqslant L_i, \forall j \in C_2, \quad N_j - L_j \leqslant n_j \leqslant N_j$$

et

$$\forall l \in C_3, L_l \leqslant n_l < N_l - L_l,$$

et $u(n) = (\tilde{n}_1,..., \tilde{n}_d)$ où

$$\forall i \in C_1, \tilde{n}_i = n_i, \forall j \in C_2, \quad \tilde{n}_j = n_j + 2L_j - N_j$$

et

$$\forall l \in C_3, \tilde{n}_l = L_l.$$

Montrons alors que $\|P_+ \bar{\phi}_N P(e_n/\bar{g})\| = \|P_+ \bar{\phi}_{2L} P(e_{u(n)}/\bar{g})\|$. Posons

$$A_1(n) = \prod_{i \in C_1} \chi_i^{n_i} \prod_{j \in C_2} \chi_i^{n_j - N_j + 2L_j} \prod_{l \in C_3} \chi_l^{L_l} = e_{u(n)}$$

$$A_2(n) = \prod_{j \in C_2} \chi_j^{N_j - 2L_j} \prod_{l \in C_3} \chi^{n_l - N_l}.$$

On peut donc écrire:

$$\frac{\chi^n}{\bar{g}} = \frac{\chi_1^{n_1} \cdots \chi_d^{n_d}}{\bar{g}} = \frac{1}{\bar{g}} \Lambda_1(n)\, \Lambda_2(n).$$

Comme par ailleurs

$$\frac{\chi^n}{\bar{g}} = \sum_{m \in \tau_L} \bar{\beta}_m \prod_{1 \leqslant i \leqslant d} \chi^{-m_i + n_i}$$

on a $P(\chi^n/\bar{g}) = \sum_{m \in \tau_L, i \in C_1, m_i \leqslant i} \bar{\beta}_m \prod_{1 \leqslant i \leqslant d} \chi^{n_i - m_i} = P(\Lambda_1(n)\, \Lambda_2(n)/\bar{g})$ et

$$P\left(\frac{\Lambda_1(n)}{\bar{g}}\right) = \sum \bar{\beta}_m \prod_{i \in C_1} \chi_i^{-m_i + n_i} \prod_{l \in C_2} \chi_j^{-m_j + n_j - N_j + 2L_j} \prod_{l \in C_3} \chi_l^{-m_l + L_l}.$$

Comme $\Lambda_2(n)\, P(\Lambda_1(n)/\bar{g}) \in H^{2+}$, il s'ensuit que

$$\Lambda_2(n)\, P\left(\frac{\Lambda_1(n)}{\bar{g}}\right) = P\left(\frac{\Lambda_2(n)\, \Lambda_1(n)}{\bar{g}}\right) = P\left(\frac{\chi^n}{\bar{g}}\right).$$

Posons $\Lambda_3(n) = \prod_{i \in C_1} \chi^{-(N_i - 2L_i)} \prod_{l \in C_3} \chi^{-(N_l - n_l - 2L_l)}$, et montrons que

$$P_+\left(\bar{\phi}_{2L} \Lambda_3(n)\, P\left(\frac{\Lambda_1^{(n)}}{\bar{g}}\right)\right) = \Lambda_3(n)\, P_+\left(\bar{\phi}_{2L}\, P\left(\frac{\Lambda_1(n)}{\bar{g}}\right)\right).$$

Comme $\bar{g} \in \bar{H}^\infty$ et que le spectre de $1/g$ est contenu dans $\prod_{j=1}^d [0 L_j] = \tau_L$, celà entraîne que $\bar{\phi}_{2L} = (\bar{g}/g)\, \bar{\chi}^{2L+1}$ appartient à $(\prod_{i=1}^d \chi^{-(L_i+1)}) . \bar{H}^\infty$. On peut donc écrire:

$$\bar{\phi}_{2L} P\left(\frac{\Lambda_1(n)}{\bar{g}}\right) = \sum_{m_i \leqslant -1,\, m_j \leqslant L_j,\, m_l \leqslant -1} \gamma_{m_1, \ldots, m_j} \prod_{i \in C_1} \chi_i^{m_i} \prod_{j \in C_2} \chi_j^{m_j} \prod_{l \in C_3} \chi_l^{m_l}.$$

Soit $Q = I - P_+$. On a

$$Q\left(\bar{\phi}_{2L} \Lambda_3(n)\, P\left(\frac{\Lambda_1(n)}{\bar{g}}\right)\right) = \Lambda_3(n)\, Q \bar{\phi}_{2L} P\left(\frac{\Lambda_1(n)}{\bar{g}}\right).$$

En effet:

$$\Lambda_3(n) \bar{\phi}_{2L} P\left(\frac{\Lambda_1(n)}{\bar{g}}\right) = \sum_{m_i \leqslant -1,\, m_j \leqslant L_j,\, m_l \leqslant -1} \gamma_m \prod_{i \in C_1} \chi_i^{m_i - N_i + 2L_i}$$
$$\times \prod_{j \in C_2} \chi_j^{m_j} \prod_{l \in C_3} \chi_l^{m_l - n_l + N_l + L_l}.$$

Comme $n_l-(N_l-L_l)\leqslant 0$, le projecteur Q appliqué à l'élément ci-dessus ne va modifier que les coefficients γ_m tels que $m_j\leqslant L_j$, on a ainsi:

$$Q\left(\Lambda_3(n)\,\bar{\phi}_{2L}P\left(\frac{\Lambda_1(n)}{\bar{g}}\right)\right)=\sum_{m_i\leqslant -1,m_j\leqslant -1,m_l\leqslant -1}\gamma_m\prod_{i\in C_1}\chi_i^{m_i-N_i+2L_i}$$
$$\times\prod_{j\in C_2}\chi_j^{m_j}\prod_{l\in C_3}\chi_l^{m_l-n_l+N_l+L_l}.$$

D'autre part

$$Q\left(\bar{\phi}_{2L}P\left(\frac{\Lambda_1(n)}{\bar{g}}\right)\right)=\sum_{m_i\leqslant -1,\,m_j\leqslant -1,\,m_l\leqslant -1}\gamma_m\prod_{i\in C_1}\chi^{m_i}\prod_{j\in C_2}\chi_j^{m_j}\prod_{l\in C_3}\chi_l^{m_l}.$$

On observe ainsi que

$$\Lambda_3(n)\left(Q\bar{\phi}_{2L}\,P\left(\frac{\Lambda_1(n)}{\bar{g}}\right)\right)=Q\left(\Lambda_3(n)\,\bar{\phi}_{2L}P\left(\frac{\Lambda_1(n)}{\bar{g}}\right)\right),$$

on en déduit la même relation pour le projecteur $P_+=I-Q$ et on obtient l'égalité annoncée, en posant $\Lambda_1(n)=e_{u(n)}$.

2ème étape. Comme $u(n)\in u(t_{N,k})=\prod_{i\in C_1}[0L_i]\quad\prod_{j\in C_2}[L_j\,1\,2L_j]$ $\prod_{l\in C_3}\{L_l\}$ que $\operatorname{card}u(t_{N,k})=\prod_{i\in C_1}L_i\prod_{j\in C_2}L_j$ et que $\operatorname{card}(C_1\cup C_2)\leqslant d$, il existe une constante M indépendante de N telle que

$$\forall N,\qquad\sup_{n\in t_{N,k+1}}\left\|P_+\,\bar{\phi}_{2L}\,P\left(\frac{e_{u(n)}}{\bar{g}}\right)\right\|=M<+\infty\qquad\left(M\leqslant\left\|\frac{1}{g}\right\|_2\right)$$

et on a

$$\sum_{n\in t_{N,k+1}}\left\|P_+\,\bar{\phi}_NP\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right)\right\|^2=\sum_{n\in t_{N,k+1}}\left\|P_+\,\bar{\phi}_{2L}\,P\left(\frac{e_{u(n)}}{\bar{g}}\right)\right\|^2\leqslant M^2\operatorname{card}(t_{N,k+1})$$
$$\leqslant\left(\prod_{j\in C_1\cup C_2\supset B}(L_j+1)\right)\prod_{l\in C_3}(N_l+1))\cdot M^2$$

avec $\operatorname{card}C_1\cup C_2\geqslant\operatorname{card}B=k+1,\quad\operatorname{card}C_3\leqslant d-k-1\quad(V(N)=\prod_{i=1}^d(N_i+1))$,

$$\frac{1}{((N_i+1))^{1-k/d}}\sum_{n\in t_{N,k+1}}\left\|P\bar{\phi}_NP\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right)\right\|^2\leqslant M^2\prod_{j\in C_1\cup C_2}(L_j+1)$$
$$\times\left(\prod_{l\in C_3}\left(\frac{N+1}{V(N)^{1/d}}\right)\frac{1}{V(N)^{r/d}}\right),\qquad r\geqslant 1.$$

Comme par hypothèse $\lim_{\inf N_j \to \infty}(N_i + 1/V(N)^{1/d}) = \alpha_i$ et $\lim_{\inf N_j \to \infty} V(N) = \infty$, on obtient

$$\lim_{\inf N_j \to \infty} \frac{1}{V(N)^{1-k/d}} \left(\sum_{n \in t_{N,k+1}} \left\| P_+ \bar{\phi}_N P\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right) \right\|^2 \right) = 0.$$

Comme le sous-ensemble $T_{N,k}$ est une réunion finie de sous-ensemble $t_{N,k}$, on a de même

$$\lim_{\inf N_j \to \infty} \frac{1}{V(N)^{1-k/d}} \left(\sum_{n \in T_{N,k+1}} \left\| P_+ \bar{\phi}_N P\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right) \right\|^2 \right) = 0$$

et enfin, comme $\forall N, \sum_{p=1}^{\infty} \|H_{\phi_N}\|^{2P} \leqslant K < \infty$

$$\lim_{\inf N_j \to \infty} \frac{1}{V(N)^{1-k/d}} \operatorname{Tr} \left((T_N(f))^{-1} - \sum_{l=0}^{k} A_{N,l} \right) = 0$$

ce qui montre (i).

(ii) Montrons que $\lim_{\inf N_j \to \infty} (1/V(N)^{1-k/d}) \operatorname{Tr} A_{N,k}$ existe. Posons $\psi_n = P_+ \bar{\phi}_N P(e_n/\bar{g})$, on a:

$$\operatorname{Tr} A_{N,k} = \sum_{n \in S_{N,k}} \left\langle \sum_{p=1}^{\infty} (H^*_{\phi_N} H_{\phi_N})^P \psi_n, \psi_n \right\rangle.$$

Fixons un sous-ensemble C_3 de $\{1,..., d\}$ tel que card $C_3 = d-k$ et soit C_1, C_2, C_3 une partition de $\{1,..., d\} = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, on définit un sous-ensemble $s_{N,k}$ et $S_{N,k}$ de la façon suivante:

$$\begin{aligned} s_{N,k} = \{n = (n_1,..., n_d) \in S_{N,k} : {} & \forall i \in C_1,\ 0 \leqslant n_i \leqslant L_i - 1; \\ & \forall j \in C_2,\ N_j - L_j + 1 \leqslant n_j \leqslant N_j \\ & \forall l \in C_3,\ L_l < n_l \leqslant N_l - l\}. \end{aligned}$$

Nous avons défini dans (i) les fonctions $\Lambda_1(n), \Lambda_2(n)$ et $\Lambda_3(n)$ $(\Lambda_2(n)\,\bar{\Lambda}_3(n) = \prod_{i=1}^{N} \chi_i^{N_i - 2L_i})$ et nous avons établi que:

$$\psi_n = P_+ \bar{\phi}_N P\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right) = \Lambda_3(n)\, P_+ \left(\bar{\phi}_{2L} P\left(\frac{e_{u(n)}}{\bar{g}}\right)\right) = \Lambda_3(n)\, \psi_{u(n)}. \tag{1}$$

Étape 1. Étude de $H_{\phi_N}\psi_n = P_- \phi_N P_+ \bar{\phi}_N P(e_n/\bar{g})$, quand $N = (n_1,..., n_d)$ est dans un voisinage de l'infini.

$$\text{On a } H_{\phi_N}\psi_n = P_- \Lambda_2(n)\, H_{\phi_{2L}} \psi_{u(n)}. \tag{2}$$

En effet, soit h un élément de $\tilde{H}^{2-}$ (i.e., $\hat{h}(m)=0$ si $m \in \mathbb{Z}_+^d$).

$$\langle H_{\phi_N}\psi_n, h\rangle = \left\langle P_-\phi_N P_+\bar{\phi}_N P\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right), h\right\rangle = \langle \psi_n, \bar{\phi}_N h\rangle.$$

Remplaçons ψ_n par la quantité correspondante dans (1):

$$\begin{aligned}\langle \psi_n, \bar{\phi}_N h\rangle &= \langle \Lambda_3(n)\,\psi_{u(n)}, h\bar{\phi}_N\rangle = \langle \Lambda_2(n)\,\phi_{2L}\psi_{u(n)}, h\rangle \\ &= \langle P_-\,\Lambda_2(n)\,\phi_{2L}\psi_{u(n)}, h\rangle.\end{aligned}$$

Ce qui montre la relation ci-dessus.

Comportement de l'expression (2) au voisinage de l'infini. On a, en posant $h=\chi_1^{m_1},..., \chi_d^{m_d}$,

$$I_3 = \|P_-\,\Lambda_2(n)\,H_{\phi_{2L}}\psi_n\|^2 = \sum_{h\in\tilde{H}^{2-}} |\langle H_{\phi_{2L}}\,\psi_{u(n)}, \bar{\Lambda}_2(n)\,h\rangle|^2. \tag{3}$$

Définissons un sous-ensemble de $\mathbb{Z}^d$ de la façon suivante:

$$\mathbb{Z}(C_1) = \{(m_1,..., m_d)\in\tilde{\mathbb{Z}}_-^d, \exists i\in C_1, m_i<0\} \qquad (\mathbb{Z}_-^d = \mathbb{Z}^d\backslash\mathbb{Z}_+^d),$$

ce qui nous permet de définir:

$$H^{2-}(C_1) = \{h\in H^{2-}, \hat{h}(m)=0, \text{si } m\notin\mathbb{Z}(C_1)\}.$$

La somme dans (3) se décompose:

$$I_3 = \sum |\langle H_{\phi_{2L}}\psi_{u(n)}, \bar{\Lambda}_2(n)\,h_1\rangle|^2 + \sum |\langle H_{\phi_{2L}}\,\psi_{u(n)}, \bar{\Lambda}_2(n)\,h_2\rangle|^2$$

où la première somme est étendue aux éléments $h_1\in H_-^2(C_1)$ et la 2ᵉ somme aux éléments $h_2\in\tilde{H}^{2-}\ominus H^{2-}(C_1)$.

Considérons la seconde somme, c'est-à-dire celle qui est étendue aux éléments $h_2=\chi_1^{m_1}\cdots\chi_d^{m_d}$, où

$$\begin{aligned} m = (m_1,..., m_d) &\in \tilde{\mathbb{Z}}_-^d\backslash\mathbb{Z}(C_1) \\ &= \{(m_1,..., m_d)\in\tilde{\mathbb{Z}}_-^d, \forall i\in C_1, m_i\geqslant 0\}.\end{aligned}$$

Écrivons maintenant $\tilde{\mathbb{Z}}_-^d\backslash\mathbb{Z}(C_1) = \Omega_1\cup\Omega_2$ où Ω_1 et Ω_2 sont disjoints et

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \{(m_1,..., m_d)\in\tilde{\mathbb{Z}}_-^d\backslash\mathbb{Z}(C_1), \exists j\in C_2, m_j<0\}, \\ \Omega_2 &= (\mathbb{Z}_-^d\backslash\mathbb{Z}(C_1))\backslash\Omega_1 \\ &= \{(m_1,..., m_d)\in\tilde{\mathbb{Z}}_-^d\backslash\mathbb{Z}(C_1), \exists l\in C_3, m_l<0\}.\end{aligned}$$

(a) Soit $m=(m_1,..., m_{j_0},..., m_d)$ un point de Ω_1 tel que $m_{j_0}<0$. On a

$$\Lambda_2(n)\, h_2=\left(\prod_{j\in C_2} \chi_j^{-(N_j-2L_j)} \prod_{l\in C_3} \chi^{-(n_l-N_l)}\right) \prod_{i=1}^{d} \chi_i^{m_i}$$

$$=\left(\prod_{i\in C_1} \chi_i^{m_i}\right)\left(\prod_{j\in C_2} \chi_j^{m_j-N_j+2L_j}\right) \prod_{l\in C_3} \chi_l^{m_l-n_l+L_l}.$$

Comme, pour $j_0\in C_2$, $m_{j_0}<0$, $m_{j_0}-N_{j_0}+2L_{j_0}$ tend vers $-\infty$ quand N_{j_0} tend vers ∞ et le point $((m_i)_{i\in C_1}$, $(m_j-N_j+2L_j)_{j\in C_2}$, $(m_l-n_l+L_l)_{l\in C_3})\in\mathbb{Z}^d$ n'est pas à distance finie quand $\inf N_j$ tend vers l'infini.

La somme qui apparaît dans I_3 et qui est étendue aux $h_2=\Pi\chi_i^{m_i}$, $m=(m_1,..., m_d)\in\Omega_1$, tend vers zéro, quand $\inf N_j\to\infty$ et $j\in C_2$ (car c'est un élément de $L^2(\mathbb{T}^d)$).

(b) Soit maintenant $m=(m_1,..., m_d)\in\Omega_2$, tel qu'il existe donc $l_0\in C_3$ pour lequel $n_{l_0}<0$ et par définition de $l_0\in C_3$, on a $L_0\leqslant n_{l_0}\leqslant N_{l_0}-L_{l_0}$.

La somme dans (3) étendue aux $h_2=\prod_{i=1}^d \chi_i^{m_i}=\chi^m$, $m=(m_1,..., m_d)\in\Omega_2$, et soit très petite soit bornée selon que $n\in s_{N,k}$ est dans un voisinage de l'infini où à une distance finie. Précisons: $\varepsilon>0$, soit N_0 déterminé par $\varepsilon>0$. On décompose $s_{N,k}=s^1_{N,k}\cup s^2_{N,k}$ qui est une partition avec

$$s^1_{N,k}=\{n=(n_1,..., n_d)\in s_{N,k}\,;\,\exists l_0\in C_3,\, n_{l_0}\geqslant N_0\}.$$

Soit $n\in s^1_{N,k}$, définissons le sous-ensemble suivant:

$$\mathscr{A}_{N_0}=\{((m_i), (m_j-N_j+2L_j), (m_l-n_l+L_l))\in\mathbb{Z}^d, \qquad (i,j,l)\in C_1\times C_2\times C_3,$$
$$m=(m_1,..., m_d)\in\Omega_2,\, n_{l_0}\geqslant N_0\}.$$

Si $n\in s^2_{N,k}$, nous définissons alors:

$$\mathscr{A}'_{N_0}=\{((m_i), (m_j-N_j+2L_j), (m_l-n_l+L_l))\in\mathbb{Z}^d, \qquad (i,j,l)\in C_1\times C_2\times C_3,$$
$$m_2\in\Omega_2,\, n_0<N_0\}.$$

Posons $\Lambda_2(n)\, h_2=\prod_{i=1}^d \chi_i^{m_i}=\chi^{m'}$, alors la 2e somme dans (3) s'écrit: si $n\in s^1_{N,k}$,

$$\sum_{m'=(m'_1,..., m'_d)\in\mathscr{A}_{N_0}} |\langle H_{\phi_{2L}}\psi_{u(n)}, \chi^{m'}\rangle|^2=t_N(u(n)),$$

si $n\in s^2_{N,k}$,

$$\sum_{m'=(m'_1,..., m'_d)\in\mathscr{A}'_{N_0}} |\langle H_{\phi_{2L}}\psi_{u(n)}, \chi^{m'}\rangle|^2=t_N(u(n)).$$

N_0 est alors choisi, lorsqu'on se donne $\varepsilon>0$, tel que $\mathscr{A}_{N_0}$ qui contient le point $m_{l_0}-n_{l_0}+L_{l_0}$ $(n_{l_0}\geqslant N_0)$ soit un voisinage de l'infini et que la somme ci-dessus étendue à $\mathscr{A}_{N_0}$ soit unférieure à $\varepsilon>0$.

Quant à la somme étendue à $\mathscr{A}'_{N_0}$, elle peut être majorée par $\|H_{\phi_{2L}}\| \leqslant \|1/g\|_2^2$.

(c) Considérons la somme du type précédent étendue aux éléments

$$\prod_{i=1}^{d} \chi^{m'_i} = \chi^{m'} \in \bar{A}_2(m)\, H^{2-}(C_1).$$

Rappelons que $\mathbb{Z}(C_1) = \{m = (m_1, ..., m_d) \in \tilde{\mathbb{Z}}^d,\ \exists j \in C_1, m_j < 0\}$. Soit P_{C_1} le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbb{T}^d)$ sur $H^{2-}(C_1)$.

Considérons la somme du type précédent étendue aux éléments $q \in \bar{A}_2(n)\, H^{2-}(C_1)$:

$$\begin{aligned}\sum_{q \in \bar{A}_2(n) H^{2-}(C_1)} |\langle H_{\phi_{2L}} \psi_{u(n)}, q \rangle|^2 &= \sum_{q' \in H^{2-}(C_1)} |\langle A_2(n)\, H_{\phi_{2L}} \psi_{u(n)}, q' \rangle|^2 \\ &= \|P_{C_1} A_2(n)\, H_{\phi_{2L}} \psi_{u(n)}\|^2.\end{aligned}$$

Mais nous avons

$$P_{C_1}(A_2(n)\, H_{\phi_{2L}} \psi_{u(n)}) = A_2(n)\, P_{C_1} H_{\phi_{2L}} \psi_{u(n)}.$$

En effet, soit $q' \in H^{2-}(C_1)$

$$\langle P_C A_2(n)\, H_{\phi_{2L}} \psi_{u(n)}, q' \rangle = \langle H_{\phi_{2L}} \psi_{u(n)}, \bar{A}_2(n)\, q' \rangle$$

or

$$\bar{A}_2(n)\, q' = \chi^{m'} = \left(\prod_{i=1}^{d} \chi^{m_i}\right) \prod_{j \in C_2} \chi_j^{-N_j + 2L_j} \prod_{l \in C_3} \chi_l^{-N_l + L_l} \quad \text{avec } m = (m_i) \in \mathbb{Z}(C_1).$$

m' peut donc être décrit par $m' = ((m_i), (m_j - N_j + 2L_j), (m_l - n_l + L_l)) \in \mathbb{Z}^d$ avec $(i, j, l) \in C_1 \times C_2 \times C_3$ et $m \in \mathbb{Z}(C_1)$. Les seuls indices modifiés dans les coordonnées de m' sont ceux correspondant à $(j, l) \in C_2 \times C_3$, donc par définition de $\mathbb{Z}(C_1)$, m' appartient aussi à $\mathbb{Z}(C_1)$, par conséquent $\bar{A}_2(n)\, q' \in H^{2-}(C_1)$ et on obtient la relation annoncée. Il s'ensuit alors que:

$$\sum_{q \in \bar{A}_2(n) H^{2-}(C_1)} |\langle H_{\phi_{2L}} \psi_{u(n)}, q \rangle|^2 = \|P_{C_1} H_{\phi_{2L}} \psi_{u(n)}\|^2.$$

(d) Soit $V(N) = \prod_{i=1}^{d} (N_i + 1)$, étudions la quantité:

$$\frac{1}{V(N)^{1-k/d}} \sum_{n \in s_{n,k}} \|H_{\phi_N} \psi_n\|^2.$$

Nous avons établi en a), b) et c) que:

$$\|H_{\phi_N} \psi_n\|^2 = \|P_{C_1} H_{\phi_{2L}} \psi_{u(n)}\|^2 + t_N(u(n))$$

tenant compte de la décomposition de $s_{N,k}$ dans b), on a:

$$\sum_{n \in s_{N,k}} \|H_{\phi_N}\psi_n\|^2 = \sum_{n \in s_{N,k}} \|P_{C_1} H_{\phi_{2L}} \psi_{u(n)}\|^2 + \sum_{n \in s^1_{N,k}} t_N(u(n))$$

$$+ \sum_{n \in s^2_{N,k}} t_N(u(n)).$$

Notons que $u(n) \in u(s_{N,k}) = \prod_{i \in C_1} [0 L_i] \prod_{j \in C_2} [L_j + 1 \; 2L_j] \prod_{l \in C_3} \{L_l\}$ et donc $u(n)$ varie dans un ensemble fini d'indices. Nous avons établi dans (b), que $\varepsilon > 0$, $\exists N_0$ tel que, $n \in s^1_{N,k}$, $N > N_0$ alors $t_N(u(n)) < \varepsilon$. On peut choisir N_0, pour que $\forall u(n) \in s_{N,k}$, $t_N(u(n)) < \varepsilon$. Nous avons par ailleurs majoré $t_N(u(n))$ par $\|1/g\|_2^2$ lorsque $n \in s^2_{N,k}$.

Il vient donc

$$\sum_{n \in s^1_{N,k}} t_N(u(n)) < \varepsilon \text{ card } s^1_{N,k}$$

et

$$\sum_{n \in s^2_{N,k}} t_N(u(n)) < \text{card } s^2_{N,k} \left\|\frac{1}{g}\right\|_2^2.$$

On a card $s^1_{N,k} \leqslant$ card $s_{N,k} = \prod_{i \in C_1 \cup C_2} L_i \prod_{l \in C_3} (N_l - 2L_l)$ et comme

$$s^2_{N,k} = \{n \in s_{N,k}, \text{ tel que } n_{l_0} < N_0\},$$

$$\text{card } s^2_{N,k} = \prod_{i \in C_1 \cup C_2} (L_i + 1) \prod_{l \in C_3 \setminus \{l_0\}} (N_l - 2L_l) \times (N_0 - 2L_{l_0}).$$

On peut alors évaluer, en notant que card $C_3 = d - k$

$$\frac{\text{card } s^1_{N,k}}{(\prod_{i=1}^d (N_i + 1))^{1-k/d}} = \prod_{i \in C_1 \cup C_2} L_i \frac{\prod_{l \in C_3}(N_l - 2L_l)}{(\prod_{i=1}^d (N_i + 1)^{1/d})^{d-k}}$$

et

$$\frac{\text{card } s^2_{N,k}}{(\prod_{i=1}^d (N_i + 1)^{1/d})^{d-k}} = \prod_{i \in C_1 \cup C_2} L_i (N_0 - 2L_{l_0}) \frac{\prod_{l \in C_3 \setminus \{l_0\}}(N_l - 2L_l)}{(\pi(N_i + 1)^{1/d})^{d-k}}.$$

Comme card $C_3 \setminus \{l_0\} = d - k - 1$, on peut encore écrire

$$\frac{\text{card } s^2_{N,k}}{(\prod_{i=1}^d (N_i + 1)^{1/d})^{d-k}} = \prod_{i \in C_1 \cup C_2} L_i (N_0 - 2L_{l_0}) \left(\prod_{k \in C_3 \setminus l_0} \frac{N_l - 2L_l}{(\pi(N_i + \,))^{1/d}} \right.$$

$$\times \frac{1}{(\prod_{i=1}^d (N_i + 1))^{1/d}}$$

Comme $\lim_{\inf N_j \to \infty} (N+1)/(\prod_{i=1}^{d} (N_i+1)^{1/d} = \alpha_l$, $\forall l \in \{1,..., d\}$, ceci nous permet d'obtenir

$$\lim_{\inf N_j \to \infty} \frac{1}{(\prod_{i=1}^{d} (N_i+1)^{1/d})^{d-k}} \sum_{n \in s_{N,k}} t_N(u(n)) = 0$$

et

$$\lim_{\inf N_j \to \infty} \frac{1}{(\prod_{i=1}^{d} (N_i+1)^{1/d})^{d-k}} \sum_{n \in s_{N,k}} \|H_{\phi_N} \psi_n\|^2$$
$$= \lim_{\inf N_j \to \infty} \frac{1}{(\prod_{i=1}^{d} (N_i+1)^{1/d})^{d-k}} \sum_{n \in s_{N,k}} \|P_{C_1} H_{\phi_{2L}} \psi_{u(n)}\|^2.$$

(e) Étudions l'existence de la seconde limite. Rappelons que $u(n) = ((n_i), (n_j - N_j + 2L_j), (L_l))$; $(i, j, l) \in C_1 \times C_2 \times C_3$. On en déduit que si $n' = ((n_i), (n_j), (n'_l))$ alors $u(n) = u(n')$. On peut réduire ainsi la somme suivante:

$$\sum_{n \in s_{N,k}} \|P_{C_1} H_{\phi_{2L}} \psi_{u(n)}\|^2 = \prod_{l \in C_3} (N_l - 2L_l) \sum_{n' \in u(s_{n,k})} \|P_{C_1} H_{\phi_{2L}} \psi_{n'}\|^2.$$

et

$$\lim_{\inf N_j \to \infty} \frac{1}{(\prod_{d=1}^{d} (N_i+1)^{1/d})^{d-k}} \sum_{n \in s_{N,k}} \|H_{\phi_N} \psi_n\|^2$$
$$= \lim_{\inf N_j \to \infty} \left(\prod_{l \in C_3} \frac{N_l - 2L_l}{N_l + 1} \right) \sum_{n \in u(s_{N,k})} \|P_{C_1} H_{\phi_{2L}} \psi_{n'}\|^2$$
$$= \left(\prod_{l \in C_3} \alpha_l \right) \sum_{n' \in u(s_{N,k})} \|P_{C_1} H_{\phi_{2L}} \psi_{n'}\|^2$$

car $u(s_{N,k}) = \prod_{i \in C_1} [0 L_i] \prod_{j \in C_2} [L_j + 1\ 2L_j] \prod_{l \in C_3} \{L_l\}$ ne dépend pas de $N = (N_1,..., N_d)$ et la limite *est finie* et ne dépend que de $1/g$ et de son spectre, (et du choix de C_1, C_2, C_3 partition de $\{1,..., d\}$). Comme $C_2 = \{1,..., d\} \backslash (C_1 \cup C_3)$), le choix de $s_{N,k}$ ne dépend en fait que de C_3, dont on impose card $C_3 = d - k$ et C_1 dont le cardinal est inférieur ou égal à k.

On notera désormais $u(s_{N,k}) = \Omega(C, C')$, où on pose $C = C_1$ et $C' = C_3$. Les sous-ensembles $S_{N,k}$ spectres des polynômes $E_{N,k}$ sur lesquels sont définis les opérateurs $A_{N,k}$ sont réunion finie de sous-ensembles $s_{N,k}$, réunion qui correspond aux choix de (C, C') avec card $C \leqslant k$ et card $C' = d - k$.

On obtient ainsi:

$$\lim_{\inf N_j \to \infty} \frac{1}{(\pi(N_i+1)^{1/d})^{d-k}} \sum_{n \in S_{N,k}} \|H_{\phi_N}\psi_n\|^2$$

$$= \sum_{C' \subset \{1,\dots,d\},\ \operatorname{card} C' = d-k,\ C \subset \{1,\dots,d\}/C'} \left(\prod_{l \in C'} \alpha_l\right)$$

$$\times \sum_{n' \in \Omega(C,C')} \|P_C H_{\phi_{2L}}\psi_{n'}\|^2.$$

Étape 2. Étudions le comportement de $P_+ \bar{\phi}_N P_- \phi_N \psi_n$. D'après ce qui précède pour n fixé

$$\lim_{\inf N_j \to \infty} P_- \phi_N \psi_n = \lim_{\inf N_j \to \infty} P_- \Lambda_2(n)\, H_{\phi_{2L}} \psi_{u(n)} = P_C H_{\phi_{2L}} \psi_{u(n)}.$$

On obtient alors

$$\lim_{\inf N_j \to \infty} P_+ \bar{\phi}_N P_- \phi_N \psi_n = \lim_{\inf N_j \to \infty} P_+ \bar{\phi}_N P_C H_{\phi_{2L}} \psi_{u(n)}.$$

Pour tout $h \in \tilde{H}^{2+}$, on a

$$\langle P_+ \bar{\phi}_N P_C H_{\phi_{2L}} \psi_{u(n)}, h\rangle = \langle \bar{\phi}_{2L} \Lambda_2(n)\, P_C H_{\phi_{2L}} \psi_{u(n)}, \bar{\Lambda}_3(n)\, h\rangle.$$

Comme $\bar{\Lambda}_3(n) = \prod_{i \in C} \chi_i^{N_i - 2L_i} \prod_{l \in C'} \chi_l^{N - n_l - L_l}$, $\bar{\Lambda}_3(n)\, h \in \tilde{H}^{2+}$. Le produit scalaire précédent est donc égal à

$$\langle \bar{\phi}_{2L}\, P_C H_{\phi_{2L}} \psi_{u(n)}, \Lambda_2(n)\, \bar{\Lambda}_3(n)\, h\rangle.$$

Comme d'autre part $\Lambda_2(n)\, \bar{\Lambda}_3(n) = \prod_{i=1}^{d} \chi_i^{N_i - 2L_i}$,

$$\Lambda_2(n)\, \bar{\Lambda}_3(n)\, h \in \tilde{H}^{2+}.$$

Posons $h = \prod \chi_i^{r_i} = \chi^r$ où $r = (r_1,\dots, r_d) \in \tilde{\mathbb{Z}}_+^d = \{r = (r_1,\dots, r_d) \in \mathbb{Z}^d, \exists l, r_l \geqslant 0\}$.
Considérons alors la quantité $\|P_+ \bar{\phi}_N P_- \psi_{u(n)}\|^2$. Elle est égale à:

$$\sum_{(r_1,\dots,r_d) \in \tilde{\mathbb{Z}}_+^d} |\langle P_+ \bar{\phi}_{2L} P_C H_{\phi_{2L}} \psi_{u(n)}, \Lambda_2(n)\, \bar{\Lambda}_3(n) \prod \chi_i^{r_i}\rangle|^2.$$

Posons $\chi^s = \Lambda_2(n)\, \bar{\Lambda}_3(n)\, h$ et $\tilde{\mathbb{Z}}_+^d(n) = (N_1 - 2L_1,\dots, N_d - 2L_d) + \mathbb{Z}_+^d$. La somme considérée ci-dessus devient:

$$\sum_{s \in \tilde{\mathbb{Z}}_+^d(n)} |\langle P_+ \bar{\phi}_{2L} P_C H_{\phi_{2L}} - \psi u(n), \chi^s\rangle|^2.$$

Lorsque $\inf_{1 \leqslant j \leqslant d} N_j$ tend vers l'infini, $\tilde{\mathbb{Z}}^d_+(n)$, ne contient pas de point à distance finie (c'est un voisinage de l'infini), cette somme tend donc vers zéro puisque $P_+ \bar{\phi}_{2L} P_C H_{\phi_{2L}} \psi_{u(n)} \in L^2(\mathbb{T}^d)$.

Considérons maintenant la somme étendue à $s_{N,k}$:

$$\sum_{n \in s_{N,k}} \|P_+ \bar{\phi}_N P_- \phi_N \psi_n\|^2 = \sum_{n \in s_{N,k}} \|P_+ \phi_N P_- \phi_N \psi_{u(n)}\|^2.$$

Or comme nous l'avons remarqué précédemment $u(n) = u(n')$ si n et n' ne différent que par les composantes d'indice dans C'. La somme précédente s'écrit alors:

$$\sum_{n \in s_{N,k}} \|P_+ \bar{\phi}_N P \phi_N \psi_n\|^2 = \prod_{l \in C'} (N_l - 2L_l) \sum_{n' \in u(s_{N,k})} \|P_+ \bar{\phi}_N P_- \phi_N \psi_{n'}\|^2.$$

Comme card $u(s_{N,k})$ est fini la somme dans le 2ème membre de l'égalité ci-dessus tend vers 0, d'après ce qui précède.

$$\lim_{\inf N_j \to \infty} \frac{1}{(\prod_{i=1}^d (N_i + 1)^{1/d})^{d-k}} \sum_{n \in s_{N,k}} \|P_+ \bar{\phi}_N P_- \phi_N \psi_n\|^2$$
$$= \lim_{\inf N_j} \prod_{l \in C'} \frac{N_l - 2L_l}{(\prod_{i=1}^d (N_i + 1))^{1/d}} \cdot \lim_{\inf N_j \to \infty} \sum_{n' \in u(s_{n,k})} \|P_+ \bar{\phi}_N P_- \phi_N \psi_{n'}\|^2.$$

La première limite tend par hypothèse vers

$$\prod_{l \in C''} \alpha_l.$$

Comme la seconde limite tend vers zéro ainsi que nous l'avons remarqué, la limite totale est nulle.

Passons maintenant à $S_{N,k}$ qui est une réunion finie de $s_{n,k}$, on obtient

$$\lim_{\inf N_j \to \infty} 1/V(N)^{1-k/d} \sum_{n \in S_{N,k}} \|P_+ \bar{\phi}_N P_- \phi_N \psi_n\|^2 = 0.$$

Nous en déduisons immédiatement que pour tout p fini

$$\lim_{\substack{\inf N_j \to \infty \\ 1 \leqslant j \leqslant d}} 1/V(N)^{1-k/d} \sum_{n \in S_{N,k}} \left\langle (H^*_{\phi_N} H_{\phi_N})^p \, P_+ \bar{\phi}_N P\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right), P_+ \bar{\phi}_N P\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right) \right\rangle = 0.$$

Nous avons par ailleurs démontré dans la proposition 1 qu'il existe K, $0 < K < 1$, tel que $\forall N$, $\|H^*_{\phi_N} H_{\phi_N}\| \leqslant K < 1$.

Comme

$$\sum_{n \in s_{N,k}} \sum_{p' \geqslant p} \|H^*_{\phi_N} H_{\phi_N})^{p'} \psi_n\|^2$$

$$\leqslant \frac{K^{p'}}{1-K} \sum_{n \in s_{N,k}} \|\psi_n\|^2 \leqslant \left\|\frac{1}{g}\right\|_2^2 \frac{K^{p'}}{1-K} \operatorname{card}(s_{N,k}).$$

Pour $\varepsilon > 0$ donné on peut choisir p tel que $K^{p'}/(1-K) < \varepsilon$. Il s'ensuit alors que

$$\overline{\lim_{\substack{\inf N_j \to \infty \\ 1 \leqslant j \leqslant d}}} \frac{1}{[(\prod_{i=1}^d (N_j+1))^{1/d}]^{d-k}} \sum_{n \in s_{N,k}} \sum_{p' \geqslant p} \|(H^*_{\phi_N} H_{\phi_N})^{p'} \psi_n\|^2$$

$$\leqslant \varepsilon \left\|\frac{1}{g}\right\|_2^2 \lim_{\inf N_j \to \infty} \prod_{l \in C'} \frac{N_l - 2L_l}{\prod_{j=1}^d (N_j+1)^{1/d}} = \varepsilon \left\|\frac{1}{g}\right\|_2^2 \cdot \prod_{l \in C'} \alpha_l.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire cette limite est nulle. On a au total, comme $S_{N,k}$ est une réunion finie de $s_{N,k}$:

$$\lim_{\inf N_j \to \infty} \frac{1}{[\prod_{i=1}^d (N_j+1)^{1/d}]^{d-k}} \sum_{n \in S_{N,k}} \langle (H^*_{\phi_N} H_{\phi_N})^p \psi_n \psi_n \rangle = 0$$

et ainsi, pour $k = 2, 3, ..., d$, on a (ii),

$$a_k = \lim_{\inf N_j \to \infty} \frac{1}{[\prod_{i=1}^d (N_i+1)^{1/d}]^{d-k}} \operatorname{Tr} A_{N,k}$$

$$= \sum_{\substack{C' \subset \{1,...,d\} \\ \operatorname{card} C' = d-k}} \sum_{C \subset \{1,...,d\} \setminus C'} \left(\prod_{l \in C'} \alpha_l\right) \sum_{n' \in \Omega(C, C')} \left\| P_C H_{\phi_{2L}} P_+ \bar{\phi}_{2L} P\left(\frac{e_n}{g}\right)\right\|^2.$$

Bibliographie

1. D. Dacunha-Castelle, Inversion des opérateurs de Toeplitz et statistiques des champs aléatoires gaussiens, *in* "Colloque International du CNRS," Vol. 307, CNRS, Lyon, 1980.
2. Grenander and Szegö, "Toeplitz Forms and Their Applications," Univ. of California Press, Berkeley/Los Angeles, 1958.
3. J. Iu. Linnick, A Multidimensional analogue of a limit theorem of G. Szegö, *Math. USSR-Izv.* **9** (1975), 1323–1332.
4. A. Seghier, Inversion de la matrice de Toeplitz en plusieurs dimensions et théorème de Szegö, *C.R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math.* **293** (1981).
5. H. Widom, Asymptotic inversion of convolution operators, *Publ. Math. IHES* **44** (1975), 191–240.
6. H. Widom, Szegö's limit theorem: The higher dimensional matrix case, *J. Funct. Analys.* **39** (1980), 182–198.
7. H. Widom, Szegö's Theorem and a complete symbolic calculus, *in* "Seminar on Singularities of Linear Partial Differential Equations," Annals of Math. Studies, No. 91, pp. 261–283, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1979.